

「量子多体系のエンタングルメントとくりこみ群」

開催日時：2011年12月14日～2011年12月16日

開催場所：京都大学基礎物理学研究所 K206室

参加者数：49名

[研究会の目的・趣旨]

低次元量子多体系の数値くりこみ群は、密度行列くりこみ群、テンソルネットワーク形式の変分などを経て大きな広がりを見せてきた。一方、AdS/CFT対応やホログラフィーのように、場の理論のエンタングルメントと拡張された時空での重力理論との対応関係が注目されてきたが、最近では物性でも盛んに議論されるようになってきている。また、格子模型の相互作用定数を曲がった空間に見立てて空間変調し、数値計算のエネルギースケールをコントロールしようという試みも始まっている。日本国内でもそれぞれの分野において独創的な発展を遂げてきてはいるが、一方で、お互いの研究テーマの類似性に興味はあっても分野の背景の違いから、なかなか相互の理解が深まらないという現状もある。拡張時空でのスケール性とエンタングルメント、そしてくりこみ群は、量子多体系の数値計算や場の理論に共通の基本である。これらのキーワードを軸に国内の研究者が集まることができる研究会を開き、それぞれの分野での現状と問題点を共有し、相互の関係性を整理して議論することは今後の基礎、応用の両面の展開にとって大いに意義のあることだと考えられる。物性、素粒子、量子情報などの分野が相互に刺激しあい、日本発のオリジナルな研究展開の方向性をうち出していくことがこの研究会の目的である。

[研究会の内容]

研究会一日目は、素粒子、物性、量子情報などの異なる分野の参加者への橋渡しを目的として、レビュー講演が重点的であった。量子系のエンタングルメントと相互作用の空間構造についての話があり、そのあと AdS/CFT 対応の入門的レビューと統計力学側から見た時空の構造と重力理論の関係性についてのアウトラインが紹介された。これに加えて、熱場理論におけるエンタングルメントエントロピー生成、および Casimir 効果のくりこみ群的解釈の発表があった。具体的な内容としては、量子スピン系でのエンタングルメントの制御に相互作用の変調を用いるというアイデアと、その源泉に時空の幾何学的構造があるというウラ話まで含めた紹介があった。引き続いて行われた非専門家向けの AdS/CFT 対応の講演では、通常、物性理論研究者には馴染みがないために敷居が高く全体像が描きにくい String や重力理論についての大変わかりやすいレビューがあり、非専門家からも活発な質疑応答があった。また、会場は飛び入りの参加者も含めて立ち見ができるほどで、この分野への関心の高さが窺えた。マルチスケールエンタングルメントくりこ

み仮説 (MERA) と時空の幾何学的構造とのレビューは物性理論の研究者側から見た AdS/CFT 対応の認識であり、これに、素粒子論や統計力学の専門家からの議論がうまく絡みあい、共通認識の構築に大きな役割を果たした。熱場理論におけるエンタングルメントの生成や、Casimir 効果を有限サイズ効果とせずにくりこみ群的に導出についての講演は、最近の話題でありながらくりこみ群とスケール性の長い歴史的背景も含むものであった。くりこみ群的考察の奥の深さを再認識させる、古くて新しいトピックスがあることが参加者の興味を引いた。

二日目は AdS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピーの解説とフェルミ流体のエンタングルメントエントロピーの重力的解釈についての最新の結果に至る過程が紹介され、引き続いて相互情報量についての講演があった。古典重力モデルの範囲で導かれるフェルミ液体の指数に上限があり、物性では標準的なフェルミ流体とはギャップがあることや、量子補正の必要性などが議論された。また、MERA の統計力学モデルは量子重力の離散化と見なせることが指摘され、今後の相互の発展が注目される。次に Sine-square 変形など 1 次元量子多体系の相互作用変形問題についての厳密な理論と場の理論についての最新の結果のレビューがあり、エネルギースケールの変調と境界条件、CFT との関係について議論がなされた。行列積状態における境界行列の一般論と境界のもたらす重要性が指摘された他、並進対称性を強制した行列積状態の構成法や、その状態を用いた変分計算の精度との関係など、具体的な数値計算への応用が議論され、欲しい状態に対して工夫を加えることにより、これまでは計算しづらい系に対しても応用の可能性が広がることが示された。テンソル積による量子状態の表現を観測に基づく量子計算に応用する話題は、伝統的な分野から見ると新鮮であり、基本的な概念から最先端の話題に至るまで幅広い議論が集中した。

三日目は、量子多体系におけるトポロジカル秩序とエンタングルメントスペクトルやエッジ状態についてのレビューでは、物性におけるトポロジカル秩序の定義から始まり、その様子がエンタングルメントスペクトルと対応がつくことが分かりやすく解説された。1 次元系では本質的なトポロジカル秩序は存在せず、対称性と対で考えなければならないことが述べられ、また、2 次元量子系での最新の結果が示された。さらに、二日目にひきつづいてテンソルネットワーク状態と量子計算についての講演があり、活発な議論がなされた。最後に、三角格子量子スピン系での MERA 数値計算例が示され、概念的な側面と具体的な数値計算がいかに融合するのかが紹介された。研究会全般を通して質疑応答は大変に活発で、時間が足りないほどであった。基本概念や物理的な意味の確認から、技術的な側面や深く突っ込んだものに至るまで様々な議論がなされたので、他分野の研究進展の現状を互いに認識するという研究会の目的は十分に達成されたと考えられる。学際的な側面がうまく発揮されたユニークな結果であるといえよう。

当初は、30 - 40 名程度の比較的小規模な研究会を想定したが、実際の総参加者は 49 名となった。また、部屋が満員で引き返していった方々も多くいたので、実質的に 60 名以上の方々が講演を聞きに来られたと推定される。日本におけるこの研究分野の大きな拠点がなかったために全体像を把握しづらかったが、興味を持っている研究者はかなり多いことが認識できた。研究者間の現状の共有、および情報交換の場として大いに役に立ったと同時に、これをきっかけに、その後の新

たな交流も生じていることから、当初の目的以上の収穫があったといえよう。今後も引き続いてこのような研究会を継続して設けていく必要性の認識で一致した。

研究会プログラム、および講演の抽象を次ページ以降に掲載する。

[世話人]

- 奥西 巧一 (新潟大学理学部) (代表)
- 遠山 貴巳 (京都大学基礎物理学研究所)
- 戸塚 圭介 (京都大学基礎物理学研究所)
- 西野 友年 (神戸大学大学院理学研究科)
- 原田 健自 (京都大学大学院情報学研究科)
- 引原 俊哉 (群馬大学大学院工学研究科)
- 松枝 宏明 (仙台高専)

12月14日

12:35 ~ 12:45 : はじめに

12:45 ~ 14:00 : 西野 友年 (神戸大)

「エンタングルメントで解決できるもの、できないもの」

14:00 ~ 15:15 : 中村 真 (京都大)

「非専門家のための AdS/CFT 対応入門」

(休憩)

15:35 ~ 16:15 : 鈴木 増雄 (東京理科大)

「TFD による RVB とエンタングルメントの取り扱い」

16:15 ~ 17:30 : 松枝 宏明 (仙台高専)

「エンタングルメント・エントロピーのスケール性と時空の幾何学構造」

17:30 ~ 18:10 : 一ノ瀬 祥一 (静岡県立大)

「Renormalization Group Approach to Casimir Force in Substance」

12月15日

9:00 ~ 10:15 : 高柳 匡 (IPMU)

「AdS/CFT 対応とエンタングルメントエントロピー」

10:15 ~ 10:55 : 芝 暢郎 (大阪大)

「Entanglement entropy of two spheres」

(休憩)

11:15 ~ 12:30 : 桂 法称 (学習院大)

「Inhomogeneous but solvable/integrable models」

(昼休)

14:00 ~ 15:15 : 丸山 勲 (大阪大学)

「一様行列積状態における境界行列」

15:15 ~ 15:55 : 上田 宏 (大阪大学)

「低次元量子スピン系に対する非整合周期行列積状態」

(休憩)

16:15 ~ 16:55 : 藤井 啓祐 (大阪大学)

「Computational power and correlation in quantum computational tensor network」

16:55 ~ 17:35 : 奥西 巧一 (新潟大学)

「Wilson の数値くりこみ群とホログラフィック RG」

17:35 ~ 18:05 : 折井 仁嗣 (大阪大学)

「少数スピン系におけるテンソルネットワークと射影の効果」

(懇親会)

12月16日

9:00 ~ 10:15 : 押川 正毅 (物性研)

「トポロジカル相とエンタングルメントスペクトル」

10:15 ~ 10:55 : 佐藤 正寛 (青山学院大)

「Gapless edge modes and their stability in two-dimensional antiferromagnets」

(休憩)

11:15 ~ 11:55 : 森前 智行 (パリ東大)

「テンソルネットワーク上での量子計算-String net condensate での例を通して」

11:55 ~ 12:35 : 原田 健自 (京都大学)

「三角格子上の格子モデルのためのエンタングルメント繰り込み」

12:35 : まとめ

エンタングルメントで解決できるもの、できないもの

神戸大学理学部 西野友年¹,
スロバキア科学アカデミー Andrej Gendiar

2つの「領域」の間のエンタングルメントは、それらが遠く離れているほど小さくなる、という「直感」は外れることがある。例えばランダムな量子1次元系にDMRGやMPS変分を適用しようとする、長い距離をまたぐエンタングルメントの存在により、変分エネルギーが正しく求められない。もう少し簡単な例が、Smooth Boundary Conditionを設定した1次元量子系の基底状態である。1次元の、相互作用しない格子フェルミ系を思い浮かべよう。系の長さが有限で、Open Boundary Conditionが設定されていれば、粒子密度が有限である縮退状態の下で、系の両端にフリーデル振動の名で知られる境界効果が現れる。バルクの物理量を観察したい場合には、このような境界効果は邪魔になるので、なるべく境界効果を抑える境界条件の導入が有用である。それがSmooth Boundary Condition (SBC)で、例えばVekićとWhiteによって導入が試みられている。(参考文献 [1])

ここで紹介するのは、Andrej Gendiarと西野が提案したSBCで、次の形のハミルトニアンで記述されるものだ。

$$\hat{H}_S = -t \sum_{\ell=1}^{N-1} \left[\sin \frac{\ell\pi}{N} \right]^n \left(\hat{c}_\ell^\dagger \hat{c}_{\ell+1} + \hat{c}_{\ell+1}^\dagger \hat{c}_\ell \right). \quad (1)$$

これが $n=2$ の場合に「驚くべき境界効果の消失」をもたらす話については、参考文献 [2]-[4] に詳しく書かれている。講演の主題は、どうやって「こんな形にハミルトニアン」にたどり着いたか?である。

実は偶然の産物なのだ。Aachen 大学に長期滞在していた Andrej Gendiar を 2008 年に訪ねた西野は、折角の訪問だから仕事の一つくらい「デッチ上げよう」とにわかに思い、多体問題は難しいから自由粒子凝集体の SBC を掘ってみることにした。そこで頭に思い浮かんだのが「地球儀」である。境界というものが無い、閉じた曲面である球を切り開くと、細長い紙辺になる。その幅は、球座標を使うと $\sin \theta$ に比例している。そこからの類推で、式 (1) の $n=1$ の場合 — 格子ハミルトニアンの球変形 — にまず到達した。Gendiar は、 $n=2$ や $n=3$ の場合も「ついでに」計算してみる価値があると考え、計算の結果 $n=2$ が効果的であることが、翌年までに判明した次第である。この間に、計算プログラムのバージョン管理に混乱があり、Errata を一件出すに至った。そこから先の進展については、桂氏の講演録を参照するのが良いだろう。

- [1] M. Vekić and S.R. White, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4283.
- [2] A. Gendiar, R. Krčmar, and T. Nishino: Prog. Theor. Phys. **122** (2009) 953-967; **123** (2010) 393.
- [3] T. Hikihara, and T. Nishino: Phys. Rev. E **83** (2011) 060414.
- [4] I. Maruyama, H. Katsura, and T. Hikihara: Phys. Rev. B **84** (2011) 165132.

¹E-mail: nishino@kobe-u.ac.jp

非専門家のための AdS/CFT 対応入門

京都大学大学院理学研究科 中村 真¹

本講演では、AdS/CFT 対応の基本となる考え方について、非専門家向けの概説を行いました。(狭義の) AdS/CFT 対応とは、ある種の強く相互作用する量子ゲージ理論と、高次元の曲がった時空上の古典重力理論の等価性を指します。この二つの理論は微視的理論のレベルで対応付けられており、例えば量子ゲージ理論のゲージ粒子の散乱振幅など、微視的プロセスの計算を古典重力側で代行することが可能です。特に、ファインマンダイアグラムによる計算が困難な強結合量子ゲージ理論の計算が古典重力側では可能となる場合があります、これが AdS/CFT 対応が注目されている理由の一つです。

しかし、物性に軸足を置く研究者の視点では、別の観点から、この対応をとらえることも可能です。AdS/CFT 対応を用いて微視的ゲージ理論を重力理論にマップすると、もとの微視的理論の粗視化が自動的に行われるように見える場合が存在します。熱力学量などの巨視的物理量を粗視化を通じて微視的理論から抽出する問題は、物性物理学の重要なテーマであり、この視点から AdS/CFT 対応を眺めるのも大変興味深いと考えられます。

この「粗視化」で重要な役割を果たすのが、重力理論側に現れるブラックホールです。ブラックホールには温度やエントロピーなどの熱力学的な概念が存在することは Hawking らによって指摘されていましたが、AdS/CFT 対応の立場では、これらの熱力学的概念は実際にゲージ理論側のゲージ粒子の多体系のそれにマップされます。重力理論側で行うことはアインシュタイン方程式を(与えられた境界条件のとで)解いているだけであり、つまり 2 階の非線形微分方程式を解くだけで微視的理論の「粗視化」が行われているように見えます。

さらに興味深いのは、ゲージ理論側のエネルギースケールが、重力理論側では「可視化」される点です。量子ゲージ理論が高次元時空上のブラックホールにマップされますので、重力理論側には余分な空間方向が存在します。そのうちの一つはブラックホールの動径座標方向です。非常に大雑把には、ブラックホール近傍に存在する物理モードはゲージ理論の長距離モードに対応し、ブラックホールから遠方に存在するモードがゲージ理論の短距離モードに対応しています。いわば繰り込み群のスケール方向が、実際の空間方向として実現されているような描像となります。

上記で述べた、微視的理論の「粗視化」とエネルギースケールの「可視化」という、AdS/CFT 対応の不思議な性質を、今まで以上に物性物理学の諸問題に応用することが出来ないでしょうか。本講演での解説内容の詳細や参考文献などは、紙数の都合上、述べることはできませんが、研究会ホームページ²の著者の発表資料からたどることができます。本講演が、分野の垣根を超えた新たな研究の発展に寄与することが出来れば幸いです。

¹E-mail: nakamura@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

²http://quattro.phys.sci.kobe-u.ac.jp/dmrg/Kyoto2011/entangRG_j.html

TFDによるRVBとエンタングルメントの取り扱い

東京理科大学 鈴木 増雄
(Masuo Suzuki)

Tokyo University of Science

1. はじめに

本研究会のような異分野交流的研究会には出来る限り参加し発表し、若い人と議論するよう努力している。強い刺激を受け、研究意欲が増すだけでなく、何十年前に書いた論文が最近になって思いがけない分野で使われているを発見する喜びを味わうことが出来るからである。また、最近精力的に研究している「エンタングルメントの問題^{1,2)}」は、統計物理学だけでなく、今回の発表にも見られるように、宇宙物理学(特にブラックホール)の問題など様々な分野に関連している。

2. 量子 - 古典対応

1976年に筆者³⁻⁵⁾が提唱した「 d 次元量子系を $(d+1)$ 次元古典系に変換⁶⁾(ST変換と呼ばれる)理論は、量子モンテカルロ法⁶⁻⁸⁾の基礎として計算物理に利用されているだけでなく、量子転送行列法⁹⁻¹⁴⁾の基礎としても解析的研究にも有効に使われている^{15,16)}。

宇宙物理学では、AdS/CFT 対応が話題になってくる。¹⁷⁻²⁰ これは一種の量子-古典対応であり、ブラックホールのエンタングルメントエントロピーの計算に有効に利用されている。^{18,19} 前者の量子転送行列法も量子系などのエンタングルメントエントロピーの計算に利用できる可能性がある。今後の発展に期待したい。

3. 熱場ダイナミクス (TFD) の一般表現定理

平衡統計力学の平均 $\langle Q \rangle$ を場の理論の方法で表現する定式化が TFD である。²¹⁻²⁴

それは、2重ヒルベルト空間 $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ の導入による定式化である。ハミルトニアン \mathcal{H} の固有状態 $\{|n\rangle\}$ と $\tilde{\mathcal{H}}$ 空間の $\{|\tilde{n}\rangle\}$ の直積 $|n\rangle|\tilde{n}\rangle$ を用いて定義される $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ の状態 $|I\rangle = \sum_n |n\rangle|\tilde{n}\rangle$ を導入する。^{21,22} これを用いて、有限温度の真空 $|O(\beta)\rangle$ を

$$|O(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} e^{-\frac{1}{2}\beta\mathcal{H}} |I\rangle; Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} \quad (3.1)$$

によって定義すると、任意のオブザーバル Q の熱平均 $\langle Q \rangle$ は

$$\langle Q \rangle = \langle O(\beta) | Q | O(\beta) \rangle \quad (3.2)$$

によって与えられる。^{21,22} ただし、 $\langle O(\beta) |$ は $|O(\beta)\rangle$ の共役な状態である。実は、 $|I\rangle$ は、一般に任意の完備直交基底 $|\alpha\rangle, |\tilde{\alpha}\rangle$ を用いて、

$$|I\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle |\tilde{\alpha}\rangle \quad (3.3)$$

と表されることが次の条件の下で証明できる。²³⁾
 すなわち、 $|\psi\rangle = a|m\rangle + b|n\rangle$ に対する希尔伯特空間の
 ベクトル $|\tilde{\psi}\rangle$ を $|\tilde{\psi}\rangle = a^*|\tilde{m}\rangle + b^*|\tilde{n}\rangle$ によって
 定義する。ただし、 a^* は a の複素共役である。
 この定義は、すでに、文献(21)で導入されていたが、
 その必然性、必要性は、筆者²³⁾の(3.3)の証明
 に利用されるまでは不明であった。こうして、
 ρ_B を対角化せずに $|\rho(\beta)\rangle$ を表すことが
 できることになり、初めて TFD が実用的に
 なった。^{25, 26)} 特に、DMRG への応用は興味
 深い。²⁷⁾ (中5節参照。)

4. TFD の RVB への応用

R.W. Anderson²⁷⁾ は、反強磁性三角格子
 の基底状態は一重項対がラニタムに存在する
 “共鳴” (今風に言えば“エンタングル”) している状態
 であると主張した。この Resonating Valence Bond (RVB)
 をダイナミカルに捉える方法として、前節の TFD の
 定式化が有効であることを筆者²⁴⁾ は 1986 年に
 提案し、変分原理を用いて、“対近似”で RVB の物理的
 描象を議論した。その際、TFD を用いると、
 有限温度の変分状態 $|\rho(\beta)\rangle$ を作る事ができる
 ので、絶対零度における変分原理を拡張し、温度
 に関する相転移の様子を調べることができる。²⁴⁾

5. TFDによる量子エンタングルメントの取り扱い

前節でも述べたように、エンタングルメントの物理的描象を研究するには、TFDの方法が便利であると期待される。この話を今回の研究会の中心テーマにする積りであったが、京都に来てすぐ松枝さんと遠山さんから Feiguin - White の論文²⁶⁾を教えて頂き早速読んでみると私の考えていたことと重なる扱い方もあったので、今回の研究会の発表は TFD の一般表現定理に重点を置いた。

謝辞 遠山貴巳氏と松枝宏明氏には、文献²⁶⁾を教えて頂き感謝致します。私の TFD の一般表現定理を初めて積極めめ有効に量子エンタングルメントの解明に利用しているのを知って感激しました。

参考文献

- 1) M. Suzuki, *Physica A* 390 (2011) 1904, A391 (2012) 1074; *Physica A* (投稿準備中, Paper III).
- 2) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* (2012).
- 3) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* 56 (1976) 1454.
- 4) M. Suzuki, *Phys. Lett. A* 146 (1990) 319; *J. Math. Phys.* 32 (1991) 400; *Phys. Lett. A* 165 (1992) 387; *Physica A* 191 (1992) 501; *J. Phys. Soc. Jpn.* 61 (1992) 3015; *Proc. Japan Acad.* 69, Ser. B (1993) 161.

- 5) 鈴木増雄: 手順の分離 — 指数積分分解, 秩序形成, およびエントロピー生成 (荒木不二洋, 江口徹, 大矢雅則 編『数理物理 私の研究』丸善 (2012) の第1章)
- 6) M. Suzuki, S. Miyashita and A. Kuroda, *Prog. Theor. Phys.* 58 (1997) 1377.
- 7) M. Suzuki, ed.: *Solid State Sciences*, Vol. 74. *Quantum Monte Carlo Methods*, Springer, Berlin, 1986.
- 8) M. Suzuki, ed.: *Quantum Monte Carlo Methods in Condensed Matter Physics*, World Scientific, Singapore, 1993.
- 9) M. Suzuki, *Phys. Rev.* B31 (1985) 2957. 量子転送行列法導入.
- 10) M. Suzuki, *J. Stat. Phys.* 110 (2003) 945.
- 11) M. Suzuki, *Physica A* 321 (2003) 334.
- 12) M. Suzuki and M. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* 78 (1987) 787 および M. Inoue and M. Suzuki, *ibid* 79 (1988) 645.
- 13) A. Sugiyama, H. Suzuki and M. Suzuki, *Physica A* 353 (2005) 271.
- 14) M. Inoue and M. Suzuki, in preparation.
- 15) A. Klümper, *Z. Phys.* B91 (1993) 507.
量子転送行列法により, 有限温度の1次元量子ハイゼンゼンベルグ模型の自由エネルギーの解析解を閉じた形で求める最初の試み。
- 16) A. Klümper, *Eur. Phys. J.* B5 (1998) 677.
その他, A. Klümper, G. Jüttner, J. Suzuki, M. Inoue 等による, 量子転送行列法を用いた多数の研究がある。
- 17) J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 231. AdS/CFT 対応の提唱。
- 18) S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 181602. Beckenstein-Hawking エンタルピーの一般化。
- 19) N. Shiba, *Phys. Rev.* D83 (2011) 065002.
2つのブラックホールのエンタルピー + エンタルピーの計算。

- 20) 松枝宏明: エンタングルメントで見る時空の幾何学
構造とテンソル積波動関数, 物性研究 2011年7月号 383-482.
- 21) Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collect. Phenom.* 2 (1975) 55.
- 22) H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachikawa, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland, Amsterdam, 1982)
- 23) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* 54 (1985) 4483.
TFDにおける有限温度の“真空”の一般表現定理の発見。
- 24) M. Suzuki, *Quantum Fluctuation*, *Thermo Field Dynamics and Quantum Monte Carlo Methods*, in the book “*Progress in Quantum Field Theory*” (edited by H. Ezawa and S. Kamefuchi, Elsevier Science Pub. B.V. 1986) 第10章。
- 25) M. Suzuki, S. Miyashita and M. Takasu, *Phys. Rev. B* 35 (1987) 3569. TFDの量子シミュレーションへの応用。
- 26) A.E. Feiguin and S. R. White, *Phys. Rev. B* 72 (2005) 220401 (R). TFDの定式化 (文献23)の一般表現定理の利用)によりDMRGを実行した論文。この論文の参考文献13)には誤りがある。Vol. 12ではなく, Vol. 54である。
- 27) P. W. Anderson, *Mat. Res. Bull.* 2 (1973) 153.

エンタングルメント・エントロピーのスケール性と 時空の幾何学構造

仙台高等専門学校 情報電子システム工学専攻 松枝 宏明¹

(2011年12月21日受理)

エンタングルメント・エントロピーは、量子系の普遍的な性質を理解するうえで重要な指標である。一方、量子系は空間次元が一つ高い古典系に変換することが可能である。従って、エントロピーが古典側のどのような物理量に反映されるか興味を持たれる。本稿では、スピン系の鈴木・トロッター分解に基づいて、古典的スピン配置に隠れた量子エンタングルメントの情報を見出す方法を紹介する。この問題は、超弦理論の AdS/CFT 対応と同等のものであり、エントロピーは異分野における最新課題間の対応を見抜く武器ともなっている。

1 量子古典対応におけるエンタングルメント・エントロピー

一見異なる物理系の同等性を見抜く操作は、現代物理学において欠くことのできない方法論である。このためには、系の詳細に依らない普遍的な量を比較する必要がある。エンタングルメント・エントロピーは、その目的にかなう物理量である。何故かという、エントロピー S は全系の波動関数 $\psi(x, y)$ に対する特異値分解 $\psi(x, y) = \sum_l U_l(x) \sqrt{\lambda_l} V_l(y)$ から $S = -\sum_l p_l \ln p_l$ と定義されるが (x, y はそれぞれシステムと環境の自由度, $p_l = \lambda_l / \sum_l \lambda_l$, $U_l(x), V_l(y)$ はカラム・ユニタリ行列), 特異値 λ_l が分解の仕方に依らない普遍的な量であると数学的に保証されているためである。一方、異なる物理系の同等性の有名な例として、鈴木・トロッター分解や AdS/CFT 対応などの量子古典対応が知られている^{1,2}。これらの量子側に関しては、エンタングルメント・エントロピーは定義通り代数的に計算可能であるが、そもそも「エンタングルメント」とは「量子もつれ」を表わしているため、古典側ではどのような量がエントロピーの対応物になっているか不明である。AdS/CFT 対応に関しては、古典側の或る極小曲面の面積という幾何学量がエントロピーに対応している³。そこでスピン系の鈴木・トロッター分解においても、古典スピンの幾何学配置がエントロピーの対応物になっていると期待される。

2 エンタングルメント・エントロピーのスケール性

量子系のエンタングルメント・エントロピー S は、熱力学エントロピーと異なり、系と外界の境界の(超)面積に比例する。系の一次元方向の長さスケールを L (格子間隔を単位とする)、空

¹E-mail: matsueda@sendai-nct.ac.jp

間次元を d とすると、 $S \propto L^{d-1}$ という面積則に従うことがよく知られている^{4,5}。一次元臨界系やフェルミ面を持つ系の場合、これに対数補正がついて

$$S \sim \frac{1}{3}CL^{d-1} \ln L, \quad (1)$$

となる⁶⁻¹²。ここで C は境界を行き来する励起モードの数であり、一次元系の場合には中心電荷 c に等しい。一次元系の波動関数に関しては MPS 表現が物理的に重要な知見をもたらす。MPS の行列次元 χ に対して、臨界系のエントロピーは

$$S = \frac{c\kappa}{6} \ln \chi, \quad (2)$$

と振舞うことが知られている¹³⁻¹⁶。ここで $\kappa = 6/c(\sqrt{12/c} + 1)$ である。エントロピーのスケール性と MPS 及びテンソル積の関わりあいは、物性研究の私の記事を参考にして下さい¹⁷。

3 バルク境界対応とコンパクト化

空間 d 次元量子系と $d+1$ 次元古典系の対応は、大きく分けて二通り存在する。一つは境界のある多様体に関するバルクと境界の対応であり、他方は空間のコンパクト化を用いた次元縮約である。AdS/CFT 対応のホログラフィーは前者に属し、鈴木・トロッター分解は後者に属する。前者の対応は、例えば AdS 空間（双曲空間）のバルクにおける等長変換が境界で共形 Killing 方程式を誘導するという形で具体的に見ることができる。また AdS 空間と CFT は共に $SO(2,d)$ の対称性を持つ。計量の形が等長変換や対称性に大きく影響している。後者は、幾つかのモデルに対しては鈴木・トロッター分解公式から直接示すことができるが、一般的にはテンソル積状態の視点から考えると理解しやすい。二次元 ($M \times N$ サイト) のテンソル積状態 (テンソル次元を χ とする) を例にとって考える。系の計量はユークリッド的で、特に曲がった空間を想定している訳ではない。必要な χ の値が小さいときに系は古典的である。サイトが M 個並んでいる方を周期境界条件にして系をシリンダー状にコンパクト化すると、系は最終的に次元 χ^M の N サイト MPS にマップされる。 χ の値が小さくても χ^M は大きくなるので、そのような MPS は一次元量子臨界系を表わすことになる。

4 スピン系の鈴木・トロッター分解に隠れた AdS/CFT 対応

一次元横磁場イジングモデルの分配関数は、異方的な二次元古典イジングモデルの分配関数に変換できる。一次元横磁場イジングモデルは、量子臨界点で中心電荷が $c = 1/2$ の CFT で記述され、式 (1) に表わされるように、エンタングルメント・エントロピーがシステムサイズに対して対数発散を持っている。従って、二次元古典イジングモデル ($L \times L$ サイト、本稿では簡単のために等方的な場合を考える) で、 $\log L$ に比例する幾何学量は何かということが問題である。二次元古典イジングモデルの臨界点では、スナップショットがフラクタル的である。即ち、臨界揺らぎのために、色々なサイズの秩序化クラスターが一枚のスナップショットに共存している。そこで、大きさ一定

で取り得る可能な全ての部分系を切り出してくると、全て同じフラクタルで但しパターン自体は各々異なるものとなる。それらのセットは実効的に熱揺らぎの効果を表わしている。つまり、一枚のスナップショットで分配関数の全情報を表現できると考えられる。このため、スナップショットのデータに重要な幾何学的意味が隠れているはずである。そこでスナップショットのデータを特異値分解することを考える¹⁸。スナップショットの各ピクセル (x, y) の情報（例えば スピンを $+1$ 、スピンを -1 とする）を要素に持つ行列 $m(x, y)$ を導入し、 $m(x, y) = \sum_l m^{(l)}(x, y)$ と特異値分解する。通常のエントラングメント・エントロピーと同様に、特異値を用いて定義されるエントロピーは、臨界点で $\log L$ の異常を持つことが簡単なモンテカルロ計算で確認できる。また値の大きな χ 個の特異値で近似したエントロピーが式(2)に従うことも確認できる。更に、特異値分解の各層 $m^{(l)}(x, y) = U_l(x)\sqrt{\lambda_l}V_l(y)$ を可視化すると、それらは特定の大きさのスピンのアイランドのみを含んだ画像のセットに自動的に分解されていることが確認できる。詳しい計算から、それらの情報は離散的 AdS 空間に格納されることが分かる。指数 l の和を途中までに制限する操作は画像圧縮に対応するため、 l は長さスケールの繰り込みを意味する。これは AdS 空間の動径方向の役割に等しい。

5 今後の展望

前述のように鈴木・トロッター分解においても隠れた AdS/CFT 対応が存在する可能性が高い。古典側の幾何学という視点から言えば、残念ながらスナップショットは AdS/CFT の場合の極小曲面に比べて厳格に定義された量ではない。従って、今回得られた結果が普遍的なものかどうか、中心電荷の異なる様々な模型や理想的なフラクタル模型で調べる必要がある。また一般にバルク境界対応とコンパクト化は異なる物理であると考えられているが、それらに関係性があるかどうか気になるところである。更に一般の写真においてもエントロピーの普遍的なスケール性が存在することが分かっている¹⁹。従って、画像のエントロピーの問題は、情報を曲がった空間上にどのように効率的に埋め込むかということに起源を發していると思われる。ウェーブレット変換などの分野との接点もありそうである。

謝辞

日頃から議論をして頂いている DMRG 関係者の皆様、また本研究会にご参加下さり多くの有益なコメントを頂きました素粒子・量子情報の専門家の皆様に感謝いたします。鈴木増雄先生にも様々な議論をして頂き、大変お世話になりました。

参考文献

- [1] M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1454.
- [2] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

- [3] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 181602; JHEP **0608** (2006) 045.
- [4] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, Phys. Rev. D **34** (1986) 373.
- [5] M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 666.
- [6] C. Holzhey, F. Larsen, F. Wilczek, Nucl. Phys. B **424** (1994) 443.
- [7] P. Calabrese and J. Cardy, J. Stat. Mech. **0406** (2004) 002 [note added: arXiv:0405152 [hep-th]]; J. Phys. A **42** (2009) 504005.
- [8] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 227902.
- [9] M. M. Wolf, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 010404.
- [10] D. Gioev and I. Klich, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 100503.
- [11] W. Li, L. Ding, R. Yu, T. Roscilde, and S. Haas, Phys. Rev. B **74** (2006) 073103.
- [12] T. Barthel, M.-C. Chung, and U. Schollwöck, Phys. Rev. A **74** (2006) 022329.
- [13] M. Andersson, M. Boman, and S. Östlund, Phys. Rev. B **59** (1999) 10493.
- [14] L. Tagliacozzo, T. R. de Oliveira, S. Iblisdir, and J. I. Latorre, Phys. Rev. B **78** (2008) 024410.
- [15] F. Pollman, S. Mukerjee, A. M. Turner, and J. E. Moore, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 255701.
- [16] Ching-Yu Huang and Feng-Li Lin, Phys. Rev. A **81** (2010) 032304.
- [17] 松枝宏明, 物性研究 **96** (2011) 383-482.
- [18] H. Matsueda, "Entanglement Entropy and Entanglement Spectrum for Two-Dimensional Classical Spin Configuration", arXiv:1109.0104 [cond-mat.stat-mech].
- [19] H. Matsueda, "Renormalization Group and Curved Spacetime", arXiv:1106.5624 [cond-mat.stat-mech].

AdS/CFT 対応とエンタングルメント・エントロピー

東京大学数物連携宇宙研究機構 高柳 匡¹

超弦理論の分野で発見された AdS/CFT 対応は、強結合の量子多体系の解析を、それと等価な古典重力理論の計算に置き換えることを可能にする。特に量子多体系のエンタングルメント・エントロピーは、反ドジッター空間 (AdS 空間) の最小面積曲面の面積として計算される。この方法を用いて、強結合系におけるエンタングルメント・エントロピーの振る舞いを理解できる。最近の発展も含めてこれらの内容をレビューする。

1 AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応 [1] は、 $d+1$ 次元の反ドジッター空間 (AdS 空間) における重力理論と、その境界に相当する d 次元の共形場理論 (CFT) が互いに等価になるという主張で、超弦理論の D ブレインを用いてその等価性を理解することができる。AdS 空間は、

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dt^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx_i)^2}{z^2}, \quad (1)$$

という計量で定義され、 (t, x_i) は、CFT が定義されている d 次元空間に相当する。 $z=0$ が AdS の境界で、計量が発散するので、 $z > a$ のようにカットオフを入れる。これは CFT の言葉でいうと紫外発散のカットオフと等価である。もっと詳しく言うと、重力を古典的な重力すなわち一般相対性理論で記述される場合を考えると、それと等価な CFT は、強結合でラージ N 極限のゲージ理論となる必要がある。また、AdS 空間の z が大きい部分を少し変形することにより、紫外固定点のある場の理論であれば、ギャップがあっても AdS/CFT を適用することができる。

2 AdS/CFT 対応を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算

エンタングルメント・エントロピーは、系の密度行列 ρ を、部分系 A に制限して定義される密度行列 ρ_A の von-Neumann エントロピー $S_A = -\text{Tr}[\rho_A \log \rho_A]$ として計算できる。場の理論においては、時間一定面を A と B の二つの領域に分けて、 B の方をトレース・アウトするという形で S_A が定義される。このとき、AdS/CFT 対応を用いて S_A を計算すると、(G_N は重力定数)

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N}, \quad (2)$$

として古典的に計算できる。ここで、 γ_A は、その境界が A の境界と一致するような、AdS 空間中の曲面のうち面積が最小となるもの (最小曲面) である [2] (レビューは [4] 参照。また時間に依存した背景の場合は [3] を参照)。

¹E-mail: tadashi.takayanagi@ipmu.jp

$z = 0$ で計量が発散しているので、 γ_A の面積 $\text{Area}(\gamma_A)$ は発散する。これは、良く知られているエンタングルメント・エントロピーの面積則に一致する。またカットオフ $z > a$ を入れて計算して、発散の主要項以外も計算することができ、そのカットオフ依存性を (2) を用いて決定することができる。

また、AdS 空間を少し変形して、ギャップのある系を考えると、閉じ込めが起きている系に相当する。実際、 S_A を計算して、 A のサイズを大きくしてゆくと、ある大きさ以上だと S_A が大きさによらなくなるという閉じ込め相の振る舞いを示す。このように S_A を用いて閉じ込め・非閉じ込めの相転移を解析できる。

3 ランダウのフェルミ液体は AdS/CFT 対応で可能か？

物性物理で最も重要な系の一つは、フェルミ面がある系であろう。最近までの様々な研究で、フェルミ面が存在すると、エンタングルメント・エントロピーの面積則が対数的に破れることが分かってきている。このことを逆手にとって、それを実現する重力背景を探してみるとどのようなようになっているであろうか？(2+1) 次元の量子多体系と 4 次元の重力の AdS/CFT 対応を例にとって考えると、次のような計量が赤外領域でフェルミ面に相当することが分かる [5]。

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left(-z^{-2m} dt^2 + z^2 dz^2 + dx^2 + dy^2 \right). \quad (3)$$

ここで m は、エネルギー条件から $m \geq 1$ を満たす必要がある。この時、系を有限温度 (= ブラックホール) にすることで比熱が計算できる。低温で、 $C \propto T^\alpha$ と振る舞うとするとき、冪 α には $\frac{2}{3}$ 以下であるという条件がつく。このことから分かることは、今仮定している古典重力の近似の範囲内では、 $\alpha = 1$ に相当するランダウのフェルミ液体は存在しないことが分かる。いいかえると常に非フェルミ液体が実現されることになる。実際、そのような非フェルミ液体を実現する重力のモデルを構成することができる [5]。その後、Sachdev らは、このモデルを用いて隠れたフェルミ面 (非可換ゲージ場の電荷をもつフェルミオンが作るフェルミ面) をエンタングルメント・エントロピーは検出することができることが指摘した [6]。また、特に $\alpha = \frac{2}{3}$ (いいかえると $m = 1$) の場合は、他の場合と比べて計量の特異性が小さいことが [7] で指摘された。

謝辞

関連する私の研究の共同研究者、特に笠真生氏、小川軌明氏、宇賀神知紀氏に大変感謝しています。また、本研究会の世話人の方々には、このような異分野間の交流を促進する大変刺激的な研究会を開催して頂いたことを心よりお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

- [2] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 181602; JHEP **0608** (2006) 045;
- [3] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, JHEP **0707** (2007) 062 [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
- [4] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, J. Phys. A **42** (2009) 504008.
- [5] N. Ogawa, T. Takayanagi and T. Ugajin, “Holographic Fermi Surfaces and Entanglement Entropy,” arXiv:1111.1023 [hep-th].
- [6] L. Huijse, S. Sachdev and B. Swingle, “Hidden Fermi surfaces in compressible states of gauge-gravity duality,” arXiv:1112.0573 [cond-mat.str-el].
- [7] E. Shaghoulian, “Holographic Entanglement Entropy and Fermi Surfaces,” arXiv:1112.2702.

Entanglement entropy of two spheres

大阪大学大学院理学研究科物理学専攻 芝 暢郎¹

場の理論におけるエンタングルメントエントロピー (EE) は元々ブラックホール (BH) のエントロピーを説明するために研究された。EE は一般に部分系 A に対して A の密度行列 ρ_A の von Neumann エントロピー $S_A = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A$ として定義される。 $(d+1)$ 次元の場の理論においては、ある時刻 $t = t_0$ における空間的 d 次元領域 A 内の場を部分系とする。BH の外側の観測者は BH 内部の情報を得られないので、外側の観測者にとっては BH の外側の領域の EE を考えるのが自然である。実際、場の理論の真空においては多くの場合、領域 A の EE はその境界 ∂A の面積に比例し、これは BH のエントロピーと類似している [1,2]。

ここでホライズンの半径がそれぞれ R_1, R_2 の 2 つの BH (A と B) の外側の領域 C の量子場の EE (S_C) を考え、特に BH 間の距離 r への依存性を考えてみる。BH の外側の観測者にとっては BH に落ち込む物体はホライズンに到達するまでに無限の時間がかかるので、BH の質量の変化を無視する限り、BH の外側の領域を孤立系とみなすことができる。よって S_C は熱力学的エントロピーとみなすことができ、 S_C の r への依存性から量子場が 2 つの BH に及ぼす entropic force を知ることができると思われる。この entropic force の性質を調べるのが本研究の動機である。一般に複合系 XY が純粋状態のとき $S_X = S_Y$ が成り立つ。よって全空間の場が純粋状態のとき $S_C = S_{AB}$ となるので、以下では便宜上 S_{AB} を考えることにする。BH が無いミンコフスキー時空における S_{AB} から 2 つの BH に働く entropic force を大雑把に見積もることにする。

本研究では、 $(d+1)$ 次元ミンコフスキー時空 ($d \geq 2$) において半径がそれぞれ R_1, R_2 の 2 つの球 (A と B) の massless free スカラー場の EE (S_{AB}) を調べ、特に 2 つの球の間の距離 r への依存性を調べる。場の状態としては真空状態を考える。EE の計算法としては Bombelli 達の方法 [1] を発展させて用いる。そして $r \gg R_1, R_2$ のとき S_{AB} の $1/r$ についての主要項が解析的に次のように求まった [3]。

$$S_{A;B} \equiv S_A + S_B - S_{AB} \approx \frac{G(R_1, R_2, a)}{r^{2d-2}}, \quad (1)$$

ここで a は UV カットオフ長で $G(R_1, R_2, a) = G(R_2, R_1, a) \geq 0$ である。また $S_{A;B}$ は A と B の相互情報量である。場の理論における EE は一般に UV カットオフに依存するので $S_{A;B}$ の a 依存性は非自明であり (例えば S_A は $a^{-(d-1)}$ に比例する)、これは解析的には求められなかった。そこで $d = 2, 3$ に対して $S_{A;B}$ を数値計算により求めた。計算法としては Bombelli 達の方法 [1] を正方格子上の場の理論に適用した。数値計算上重要な点は、従来は全空間の体積は有限にして EE が計算されていたが (例えば [2])、本研究ではあらかじめ解析的に体積無限大極限をとったことにより、 $S_{A;B}$ の r 依存性を明確にすることができたことである。結果は、 $d = 2, 3$ においては $S_{A;B}$

¹E-mail: shiba@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

は a に依存せず、 $r \gg R_1, R_2$ に対して次式のようになった。

$$S_{A;B} = \frac{0.26 R_1^2 R_2^2}{r^4} \quad (2)$$

$$S_{A;B} = \frac{0.37 R_1 R_2}{r^2}. \quad (3)$$

(2) の結果を使い 2 つの BH に働く entropic force を大雑把に見積もると、 $S_C = S_{AB}$ は r が大きいほど増加するのでこの entropic force は斥力であり、また $r \gg R_1, R_2$ に対しては $1/r^5$ に比例することが分かる。また $R_1 = R_2 \equiv R$ の BH に対して、場の温度をホーキング温度とし、entropic force の大きさを見積もると R がプランク長程度の BH に対しては $r \approx R$ のとき entropic force が重力と同程度になるという結果となった。ここでの entropic force の見積もりは非常に大雑把ではあるが、プランク長程度の BH に対しては entropic force が重要になりうることを示唆している。

- [1] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, Phys. Rev. D34, 373 (1986)
- [2] M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. 71, 666 (1993), arXiv:hep-th/9303048
- [3] N. Shiba, Phys.Rev. D83, 065002 (2011), arXiv:1011.3760 [hep-th].

Inhomogeneous but solvable/integrable models

学習院大学 理学部 桂 法称¹

量子多体系の基底状態を求める際に先ず最初に試みられるのは、平均場近似や Hartree-Fock 近似であるが、これらは基底状態として実空間あるいは運動量空間における直積状態、つまりエンタングルしていない状態を仮定している。このような平均場的な近似を超えたアプローチとしては、量子化学の配置間相互作用法、Gutzwiller projection、Bethe 仮設法、分数量子 Hall 系における Laughlin の試行関数などが挙げられる。これらのアプローチでは、基底状態として複数の Slater 行列式の線形結合として表される状態、つまりエンタングルした状態を仮定している。しかしこれらの場合も、個々の Slater 行列式の基底としては相互作用のない場合の一粒子固有状態を用いており、対応する一粒子問題を解くことを前提にしている。したがって、外場や乱れなどの非一様性により一体の Hamiltonian が簡単に解けない場合には、困難を強いられることになる。

本研究では、「一体の Hamiltonian を先ず解く」という標準的なアプローチを最初から放棄する。そして、一見不可能に思える「多体問題を多体問題のまま解く」ことを試み、実際に可能な二つの例を示す。先ず最初の例では、開放端を持つ一次元量子臨界系において、局所 Hamiltonian を sine 二乗関数に従って空間的に変調させた場合を考える。このような変形を sine 二乗変形 (sine-square deformation, 以下 SSD と略) と呼ぶ。SSD はスムーズ境界条件の一種として導入されたものだが [1]、後に SSD を施した系の多体の基底状態が周期境界条件 (PBC) を課した一様系の基底状態とほぼ一致することが数値的に明らかにされている [2]。この対応関係は、一次元自由フェルミ粒子系の場合には厳密に成立する [3, 4]。ここで自由フェルミ粒子系といえども、SSD を施した系の一粒子固有状態は、露わな形に求めることはできない点に注意されたい。証明において鍵となるのは、SSD を施した系の Hamiltonian が次のように分解できる点である：

$$\mathcal{H}_{\text{SSD}} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_0 - \frac{1}{4}(\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-). \quad (1)$$

ここで、 L サイトの一様周期系の Hamiltonian \mathcal{H}_0 が

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{j=1}^L h_{j,j+1} + \sum_{j=1}^L h_j, \quad (2)$$

と書ける場合、 \mathcal{H}_{\pm} は

$$\mathcal{H}_{\pm} = \sum_{j=1}^L e^{\pm i\delta j} h_{j,j+1} + \sum_{j=1}^L e^{\pm i\delta(j-1/2)} h_j, \quad (3)$$

と表される (ただし、 $\delta = 2\pi/L$)。ここで、 \mathcal{H}_{\pm} は非エルミートな演算子である。自由フェルミ粒子系の場合、簡単な計算により周期系の基底状態 ($|0\rangle$) が \mathcal{H}_{\pm} のゼロエネルギー状態、つまり

¹E-mail: hosho.katsura@gakushuin.ac.jp

$\mathcal{H}_\pm|0\rangle = 0$ を満たすことが分かる。このことは直ちに $|0\rangle$ が \mathcal{H}_{SSD} の固有状態であることを意味するが、さらに、Perron-Frobenius の定理を援用することにより \mathcal{H}_{SSD} の基底状態であるとも言える [3, 4]。同じ方法により、横磁場 Ising 模型の臨界点直上においても SSD 系と PBC 系の間に同じ対応関係が成り立つことが証明できる [5]。同様の対応関係は、自由フェルミ粒子系に帰着できない XXZ スピン鎖などでも数値的に確認されているが [2, 6, 7]、これは SSD 系の Hamiltonian が対応する共形場理論における Virasoro 代数の生成子 $L_0, L_{\pm 1}$ によって表現できること、および基底状態の $SL(2, \mathbb{C})$ 不変性を仮定することにより自然に説明することができる [5]。

第二の例として本研究で取り扱うのは、スピン演算子とフェルミオン演算子からなる格子上の超対称性量子力学系である。この模型は、任意グラフ上で定義可能であるが一次元開放鎖において多くの特筆すべき性質を持つ [8]。まず、 $2L$ サイトからなる開放鎖を考えた場合、各準位は 2^L の縮退度を持つ。またこの縮退は、(超対称性を保つ範囲で) 任意の非一様なエネルギー変調を考えても保たれる。ここでこの縮退は、超対称性だけでは説明できない、非常に高い縮退である点に注意されたい(ゼロエネルギーの基底状態に限れば、 2^L の縮退度はコホモロジーを用いることにより証明できる)。この模型は Jordan-Wigner 変換などにより、自由フェルミ粒子系に帰着することはできないが、Hamiltonian が sYangian [9] と呼ばれる非自明な代数の生成子と可換であることを示すことができる。この sYangian の生成子はある種の collective なフェルミオン演算子とみなすことができるが、これらを用いて、 2^L に縮退したゼロエネルギー基底状態を全て構成することができる [8]。

本研究は引原俊哉氏(群馬大)、丸山勲氏(大阪大)、田中彰則氏(有明高専)、Paul Fendley 氏(Univ. Virginia)、Xiao-Liang Qi 氏(Stanford Univ.) との共同研究に基づきます。

参考文献

- [1] A. Gendiar, R. Krccmar, and T. Nishino, Prog. Theor. Phys. **122** (2009), 953; **123** (2010), 393.
- [2] T. Hikihara and T. Nishino, Phys. Rev. B **83** (2011), 060414.
- [3] H. Katsura, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011), 252001.
- [4] I. Maruyama, H. Katsura, and T. Hikihara, Phys. Rev. B **84** (2011), 165132.
- [5] H. Katsura, arXiv:1110.2459v2 [cond-mat.stat-mech].
- [6] A. Gendiar, M. Daniška, Y. Lee, and T. Nishino, Phys. Rev. A **83** (2010), 052118.
- [7] N. Shibata and C. Hotta, Phys. Rev. B **84** (2011), 115116.
- [8] H. Katsura *et al.*, in preparation.
- [9] P. Fendley and K. Schoutens, J. Stat. Mech. (2007), P02017.

一様行列積状態における境界行列

大阪大学大学院 基礎工学研究科 丸山勲¹

一体の量子力学での境界条件は、まさに量子性、つまりエネルギー量子化条件に直接寄与する重要な性質であった。境界条件は波動関数も変更し、例えば周期境界条件での平面波は、無限量子井戸において $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ となる。これは端が切れた ($\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0$) 事と対応している。そんな自然な対応関係を裏切る面白い変形 (SSD[1]) が近年報告されている。周期境界条件下のハミルトニアンと、SSD で端を切ったハミルトニアンを考えた時、両者の一電子状態 $\phi_n(x)$ は異なるものの、その多電子状態 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ が一致する。つまり端が切れた系の基底状態 Φ は繋がっていた (つまり並進対称性を満たす) のである [2]。境界条件が波動関数に与える影響として、近年のトポロジカル絶縁体の議論においても、端を切って初めて出てくるエッジ状態が注目されている。

波動関数の表現の一つである行列積状態において、境界条件はどのような影響を与えるだろうか？この境界の影響を引き受ける存在が境界行列である [3]。行列積状態は変分状態として密度行列繰り込み群 (DMRG) 法などの数値計算において用いられるだけでなく、AKLT 模型における厳密な基底状態 (VBS 状態) の表現としても用いられ、近年には行列積状態を用いたベータ仮説も提案されている。行列積状態が用いられるのは一次元量子多体系であるが、その拡張としてテンソル積状態や MERA などの新たな変分状態が高次元を考えるために近年盛んに研究されている。その拡張において忘れられているのが境界行列であるが、境界行列は一様行列積についての我々の研究でたびたび重要な役割をはたしてきたので、それについて報告した。

まず、ベータ仮説法において、境界行列は古典二次元系 6-vertex 模型のドメインウォール境界条件と対応し、粒子数を固定するために必要なものである事が分かった [4]。特に、連続空間において (厳密な) 行列積状態 [5] は、

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_N)} \Big|_{J=0}, \quad Z[J] = \text{Tr} \left[\Omega \hat{P} \exp \left(\int dx \mathcal{K} + \mathcal{R}^\dagger J(x) \right) \right]$$

と場の理論的に表す事が可能である。 Ω が境界行列であり、 \hat{P} は空間順序積、 \mathcal{K}, \mathcal{R} は状態の自由度を担う行列であり、厳密な表式は論文 [5] で定義される。また、境界行列の重要性は、波動関数が周期性を持つ場合の数値計算手法 [6]、VBS 状態におけるトポロジカル・デイスエンタングラー [7, 8] においても示される。特に、VBS 状態において系全体のフラックスを境界行列が担う事も分かり、これにより Z_2 ベリー位相というトポロジカル量が非自明な値を持つ事が理解される [8]。このように、境界行列は、例え周期境界条件下で並進不変な一様行列積状態であっても無視する事が出来ない重要な役割を持つと言える。

[1] A. Gendiar, R. Kremer, and T. Nishino, Prog. Theor. Phys. **122** (2009) 953; **123** (2010) 393.

¹E-mail: maru@mp.es.osaka-u.ac.jp

- [2] I. Maruyama, H. Katsura, and T. Hikihara, Phys. Rev. B **84** (2011) 165132.
- [3] S. Östlund, S. Rommer, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3537.
- [4] H. Katsura, I. Maruyama, J. Phys. A. **43** (2010) 175003.
- [5] I. Maruyama, H. Katsura, J. Phys. Soc. Jpn. **79** (2010) 073002.
- [6] H. Ueda, I. M., and K. Okunishi: J. Phys. Soc. Jpn. **80** (2011) 023001; H. Ueda, I. M.: arXiv:1111.3488, arXiv:1112.2075.
- [7] K. Okunishi, Phys. Rev. B. **83** (2011) 104411.
- [8] I. Maruyama, AX.1109.4202.

低次元量子スピン系に対する非整合周期行列積状態

大阪大学大学院 基礎工学研究科 上田宏¹, 丸山勲²

一様な量子スピン系の基底状態を、 $|\Psi\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\sigma} \text{Tr} \left[A_0^{\sigma_N \sigma_1} \prod_{j=1}^{N-1} A_j^{\sigma_j \sigma_{j+1}} \right] |\sigma\rangle$ で表される「境界を除いて一様な行列積状態 (MPS)」で評価することを考えよう。ここで $\sigma = \{\sigma_j\}$, σ_j は j サイトのスピン状態, $A_0^{\sigma_N \sigma_1}$ と $A_j^{\sigma_j \sigma_{j+1}}$ は m 次元行列である。「この MPS で表現可能な状態の中で, 最も簡単なものは何か?」という問いに対する最も相応しい答えは, $m = 1$ かつ $A_0 = A$, $A_j^{\sigma_j \sigma_{j+1}} = A^{\sigma_j}$ で記述可能な Ferro 状態であろう。この状態においては, 系を二つの領域 A と B にどのように分割しても, AB 間の量子的な相関を表すエンタングルメントエントロピーは $S_A = \text{Tr}[-\rho_A \log \rho_A] = 0$ となる。ここで $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$ である。一方で, $S_A = 0$ にもかかわらず先の MPS で記述が困難な状態の例として, 非整合周期 Q で回転する古典的なヘリカルスピン状態がある。この場合, 適当な回転軸 n 周りで非整合周期 Q をもつスピン回転演算子 $\hat{R}(n, Q) = \prod_j \exp(-ijQ\hat{s}_j \cdot n)$ により, ハミルトニアンを予めユニタリ変換することで基底状態を Ferro 状態にすることができる。これを量子スピン系に対して適用した場合, 捻った効果はどう現れるだろうか?

本研究では, スピン $S = 1/2$ ハイゼンベルグ鎖 $\mathcal{H}_1 = \sum_j \hat{s}_j \cdot \hat{s}_{j+1} + H_z \sum_j \hat{s}_j^z$ およびジグザグ鎖 $\mathcal{H}_2 = \sum_j \sum_{k=1}^2 J_k \hat{s}_j \cdot \hat{s}_{j+k} + H_z \sum_j \hat{s}_j^z$ (ここで $J_1 < 0$, $J_2 > 0$) に対して, 非整合周期をもつスピン回転演算子によるユニタリ変換を施し, 境界を除いて一様な MPS を用いて基底状態を評価した [1]。周期 Q は行列 $A_j^{\sigma_j \sigma_{j+1}}$ の行列要素とともに修正パウエル法により最適化される [2]。本解析により以下の 2 点が明らかとなった: 1) ハイゼンベルグ鎖においては, $Q = \pi$ で変分エネルギーが最小となり, 併せて, 転送行列 $T_{\alpha\sigma_j\alpha';\beta\sigma_{j+1}\beta'} = A_{\alpha;\beta}^{\sigma_j\sigma_{j+1}*} A_{\alpha';\beta'}^{\sigma_j\sigma_{j+1}}$ の絶対値最大固有値の 2 重縮退が解かれて唯一となる。これは, 整合周期をもつ MPS の解析で 2 倍周期の MPS が同模型に対して最適であったことと対応しており [3], 回転演算子の導入が変分パラメータの半減を達成したことを意味する。2) ジグザグ鎖に関しては, $m = 2, 3$ という小さな行列次元の MPS にもかかわらず, Vector-chiral 相における相関関数の非整合周期に関して密度行列繰り込み群による解析 [4] と矛盾のない結果が得られた。周期 Q が非整合のときに変分エネルギーが最適になる様子は bilinear-biquadratic 相互作用を持つ $S = 1$ スピン鎖においても確認できている [5]。

[1] H. U., I. M.: arXiv:1112.2075.

[2] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery: *Numerical Recipes in Fortran 90* (Cambridge University Press, New York, 1996).

[3] H. U., I. M., and Kouichi Okunishi: J. Phys. Soc. Jpn. **80** (2011) 023001.

[4] T. Hikihara, L. Kecke, T. Momoi, and A. Furusaki: Phys. Rev. B **78** (2008) 144404.

[5] H. U., I. M.: arXiv:1111.3488.

¹E-mail: ueda@aquarius.mp.es.osaka-u.ac.jp

²E-mail: maru@mp.es.osaka-u.ac.jp

量子計算テンソルネットワークにおける量子計算能力と相関

大阪大学 基礎工学研究科 藤井 啓祐¹

パリ東大, 東工大 森前 智行²

1 はじめに

量子計算を実行するパラダイムは、量子回路を用いた量子計算と、測定に基づく量子計算 (MBQC) [1] の2つに大別される。前者は、基本的な量子演算回路を用いて所望のユニタリ演算を実現する。後者は、クラスター状態と呼ばれるエンタングル状態に対して、不可逆な操作である射影測定を行うことによってユニタリ演算をシミュレートする [1]。このような一方向量子計算 (one-way quantum computation) では、量子計算に使われるリソース状態の準備と計算を実行するための操作 (射影測定) が完全に切り離されている。この性質を利用することによって、確率的にしか成功しない2量子ビット演算を用いても、スケーラブルな量子計算を達成することができる [2, 3, 4, 5, 6]。また、三次元状に繋がったクラスター状態に対して、測定を行うことによって、フォールトトレラントトポロジカル量子計算を行うことも可能である [7]。さらには、量子多体エンタングル状態が量子計算を実行するためのリソースであるため、MBQC を通じて量子多体系を扱う物性物理学と量子情報科学の橋渡しを行うことも可能であろう。

2 量子計算テンソルネットワーク

クラスター状態をエネルギーギャップのあるハミルトニアン基底状態として準備することができれば、量子計算のためのリソース状態をロバストに得ることができる。しかしながら、クラスター状態は自然な (二体相互作用) ハミルトニアンの基底状態にはなり得ないことが示されている [8]。また、一般に、フラストレーションのないスピン-1/2系における任意の二体相互作用ハミルトニアンの基底状態は MBQC のリソース状態として利用できないことが示されている [9]。従って、基底状態として MBQC のリソース状態を得るためにはより高い次元の粒子を用いる必要がある。

近年、Gross と Eisert によって、より一般的なリソース状態 (高次元粒子の多体エンタングル状態) を用いた MBQC が提案された (quantum computational tensor network, QCTN) [10]。この枠組みでは、リソース状態は行列積状態 (matrix-product state, MPS [11])、

$$|\bar{\Psi}(R, L)\rangle_1^n \equiv \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{\langle R | A[i_n] \cdots A[i_1] | L \rangle | i_n \cdots i_1 \rangle}{\sqrt{f_n(|R\rangle, |L\rangle)}}$$

¹E-mail: fujii@qi.mp.es.osaka-u.ac.jp

²E-mail: morimae@gmail.com

で与えられる．ここで， $A[i_k]$ と $|R\rangle, |L\rangle$ ($\langle R|R\rangle = \langle L|L\rangle = 1$) はそれぞれ $D \times D$ 行列と D 次元境界ベクトルであり，これらが構成する空間を相関空間 (correlation space, CS) と呼ぶ [10] . また， $|i_k\rangle$ ($i_k = 0, \dots, d-1$, $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$) は k 番目の d 次元量子系 (qudit) を意味する . そして， $\sqrt{f_n(|R\rangle, |\psi\rangle)}$ は規格化因子である . 一番目の d 次元系を基底 $\{|\alpha_j\rangle \equiv \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{ji}|i\rangle\}$ ($i, j = 0, \dots, d-1$ and $\langle \alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij}$) で測定し，測定結果 α_j を得たとき，測定後の状態として

$$\begin{aligned} & \sum_{i_2, \dots, i_n} \frac{\langle R|A[i_n] \cdots A[i_2]A[\alpha_j]|L\rangle |i_n \cdots i_2\rangle}{\sqrt{f_n(|R\rangle, |L\rangle)}} \otimes |\alpha_j\rangle \\ &= \frac{\sqrt{f_{n-1}(|R\rangle, |L'\rangle)}}{\sqrt{f_n(|R\rangle, |L\rangle)}} |\bar{\Psi}(R, L')\rangle_2^n \otimes \sqrt{a_j} |\alpha_j\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

を得る . ここで， $A[\alpha_j] \equiv \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{ji}^* A[i]$ であり， $a_j I \equiv A^\dagger[\alpha_j]A[\alpha_j]$ とし， $|L'\rangle \equiv A[\alpha_j]/\sqrt{a_j}|L\rangle$ とした . 測定前の状態の右側境界ベクトル $|L\rangle$ が，測定後の状態では $|L'\rangle$ に変化しているのて，状態 $|L\rangle$ に対して量子演算 $A[\alpha_j]/\sqrt{a_j}$ を CS 内でシミュレートしたことになる . $A[i_k]$ と基底 $\{|\alpha_j\rangle \equiv \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{ji}|i\rangle\}$ を適切に与えておけば，CS 内でユニタリ演算，すなわち量子計算をシミュレートすることができる . そのために， $A^\dagger[i]A[i] \propto I$ であるような MPS に限定し， $\sum_i A[i]^\dagger A[i] = I$ となるように規格化因子を決めておく . 今考えているリソース状態である MPS では，単一量子系のユニタリ演算しかシミュレートすることができないが，その拡張状態であるテンソルネットワーク状態 (もしくは，projected entangled pair state, PEPS) [12, 13] に対して同様に測定を行うことによって，任意の量子計算を CS 内でシミュレートすることができる [14, 15, 16, 17, 18] .

量子ビットを用いた量子計算に興味があるので， $D = 2$ の場合を考える . さらに， $d = 2$ として， $A[0] = |+\rangle\langle 0|/\sqrt{2}$, $A[1] = |-\rangle\langle 1|/\sqrt{2}$ ($|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$) の場合を考えると，一次元クラスター状態を用いた一方向量子計算になる . また， $d = 3$ として， $A[0] = X$, $A[1] = Y$, $A[2] = Z$ (X, Y, Z はパウリ行列) とすれば，対応する MPS は一次元 AKLT (Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki) 状態 [19] となり，これは最近接二体相互作用ハミルトニアン基底状態となる . この状態に対して，基底 $\{\cos \theta|0\rangle + \sin \theta|1\rangle, \sin \theta|0\rangle - \cos \theta|1\rangle, |2\rangle\}$ もしくは， $\{|0\rangle, \cos \phi|1\rangle + \sin \phi|2\rangle, \sin \phi|1\rangle - \cos \phi|2\rangle\}$ で測定を行うことによって，演算 $\{Xe^{i\theta Z}, -Ye^{i\theta Z}, Z\}$ もしくは， $\{X, Ye^{i\phi X}, -Ze^{i\phi X}\}$ を CS 内でシミュレートすることができる . 従って，適切な基底を用いて測定を繰り返すことによって，単一量子ビットの任意の回転を実現することができる [14] . 二体相互作用ハミルトニアンの基底状態を用いてユニバーサル量子計算を実現する方法として，一次元 AKLT 状態 ($d = 3$) と動的相互作用を用いる方法 [14] , スピン-5/2 の粒子 ($d = 6$) を用いた三重クラスター状態による方法 [15] , スピン-3/2 の粒子 ($d = 4$) を用いた疑似一次元 AKLT 状態による方法 [16] , スピン-3/2 の粒子 ($d = 4$) を用いた二次元 AKLT 状態による方法 [17, 18] など，様々なリソース状態を用いた QCTN が議論されている . また，二体相互作用ハミルトニアンの熱平衡状態を用いて，フォールトトレラント量子計算を行う方法が，スピン-2 とスピン-3/2 粒子の複合系 [20] , スピン-3/2 粒子のみからなる系 [21] において提案されている .

3 量子計算能力と相関

しかし、リソース状態におけるどのような物理的性質がユニバーサル量子計算を可能にするかはまだよくわかっていない。また、QCTN における MBQC が、従来の一方向量子計算とどのように異なるのか、もしくは類似しているのかもよく理解されていない。本研究では、多体状態の性質を調べる指標として古くから用いられてきた二地点相関に着目し、QCTN におけるリソース状態の二地点相関の振る舞いと量子計算能力、特に射影測定と単一量子ビットの任意の回転の可能性の関係について調べた [22]。

この結果、以下のことが明らかとなった。

- (i) 大きさが有限のリソース状態 (MPS) では、必ずしも射影測定が正確に実現されない。
- (ii) $\mathcal{E}\rho \equiv I/2\text{Tr}[\rho]$ (completely depolarizing channel) とする。MPS を定義する行列 $A[i]$ から構成される確率的ユニタリチャネル (stochastic unitary channel) \mathcal{A} が $\mathcal{A}^r = \mathcal{E}$ の場合、二地点相関が有限距離 $(r+1)$ で消え、有限サイズのリソース状態であっても測定を行う場所が境界から $(r+1)$ 以上離れていれば射影測定が CS 内で正確に実行される。
- (iii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{A}^r = \mathcal{E}$ であるとき、二地点相関が指数関数によって上から抑えられ、リソース状態の大きさを十分大きくする極限で射影測定が正確に実現される。
- (iv) $B_j \in \{I, X, Y, Z\}$ として、 $A[0] = \sqrt{c_m/2}e^{i\theta_0 Y}$, $A[1] = \sqrt{c_m/2}e^{i\theta_0 Y} Z$, $A[j] = \sqrt{c_j}e^{i\theta_j Y} B_j$ ($j = 2, \dots, d-1$) で与えられるようなリソース状態に対しては、境界ベクトルが $|R\rangle\langle R| = (I \pm Y)/2$ となるようにとることによって、リソース状態が有限の大きさであっても任意の地点において射影測定を正確に行うことができる。

例えば、クラスター状態 [1] は $r = 2$ で二地点相関が消える。また、 $A[0] = I$, $A[1] = X$, $A[2] = Y$, $A[3] = Z$ であるような $d = 4$ のリソース状態は $r = 1$ で二地点相関が消える。これらのリソース状態では、CS 内で射影測定を正確にシミュレートすることができ、クラスタータイプのリソース状態といえる。一方、次元 AKLT 状態 [14]、Gross による次元リソース [10] では、二地点相関が指数関数的減衰を示す。このため、必ずしも CS 内で射影測定が正確に実現されるとは限らない。大抵の (量子相転移点しない) 基底状態では、二地点相関が指数関数的減衰を示す。従ってこの結果は、リソース状態を自然なハミルトニアン基底状態にしたため、リソース状態に有限距離では消えない二地点相関が生じ、射影測定が必ずしも正確に出来なくなることを示している。しかし、二地点相関が指数関数減衰するリソース状態であっても、(iv) にあるクラスの MPS であれば (上記の AKLT 状態や Gross によるリソース状態はこのクラスに含まれる)、境界ベクトル $|R\rangle$ を適切に選ぶことによって、正確に射影測定をシミュレートできることがわかる。

さらに、MPS を定義する行列 $A[i]$ から構成される確率的ユニタリチャネル \mathcal{A} の性質から、以下のことがわかる。

- (v) 確率的ユニタリチャネル \mathcal{A} は必ず、適切に基底を選ぶことによってすべての i に対して $A[i] = X^s e^{i\beta_i Z}$ ($s = 0, 1$) となる、もしくは、 $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{A}^r \rightarrow \mathcal{E}$ のどちらかである。前者の場合、単一

量子ビットの任意の回転が出来ない。後者の場合は (iii) より、リソース状態の大きさを十分大きくとれば正確な射影測定を実現することが可能である。

上記 (v) の結果から、GHZ 状態やイジング反強磁性状態といった、距離に依存せず一定の二地点相関をもつリソース状態では、単一量子ビットの任意の回転をシミュレートすることができず、ユニバーサル MBQC のリソース状態としては利用できないことがわかる。実際、GHZ 状態は、 $A[0] = I/\sqrt{2}$, $A[1] = Z/\sqrt{2}$ で与えられ Z 軸回転しか行えない。また、 W 状態のような二地点相関が多項式的減衰を示す場合は、 $A^\dagger[i]A[i] \propto I$ を満たすような MPS では記述できず、そもそもユニタリ演算をシミュレートすることができない。実際、 W 状態は、 $A[0] = I$, $A[1] = |0\rangle\langle 1|$ で与えられることから、このことが確認できる。一方、単一量子ビットの任意の回転が可能なリソース状態の二地点相関は必ず指数関数で上から抑えられ、また、リソースの大きさを十分大きくする極限で、射影測定を CS 内で正確にシミュレートすることができる。

4 まとめ

本研究では、QCTN におけるリソース状態の二地点相関の振る舞いと、量子計算能力の関係について議論した。ここでは、一次元リソース状態である MPS に限定して議論したが、一般のリソース状態の場合でも測定によって一次元リソース状態に帰着することができるので、同様の結果が得られると考えている。

謝辞

本研究は新学術領域研究 (20104003:「半導体における動的相関電子系の光科学」), ANR (StatQuant JC07 07205763) の補助を受けて行われた。

参考文献

- [1] R. Raussendorf and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001); R. Raussendorf, D. E. Browne, and H. J. Briegel, Phys. Rev. A **68**, 022312 (2003).
- [2] M. A. Nielsen, Phys. Rev. Lett. **93**, 040503 (2004).
- [3] D. E. Browne and T. Rudolph, Phys. Rev. Lett. **95**, 010501 (2005).
- [4] L.-M. Duan and R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **95**, 080503 (2005).
- [5] S. D. Barrett and P. Kok, Phys. Rev. A **71**, 060310(R) (2005).
- [6] K. Fujii and Y. Tokunaga, Phys. Rev. Lett. **105**, 250503 (2010).

- [7] R. Raussendorf, J. Harrington, and K. Goyal, *Ann. Phys.* **321**, 2242 (2006); R. Raussendorf and J. Harrington, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 190504 (2007); R. Raussendorf and J. Harrington, *New J. Phys.* **9**, 199 (2007).
- [8] M. A. Nielsen, *Rep. Math. Phys.* **57**, 147 (2006).
- [9] J. Chen, X. Chen, R. Duan, Z. Ji, and B. Zeng, *Phys. Rev. A* **83**, 050301(R) (2011).
- [10] D. Gross and J. Eisert, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 220503 (2007); D. Gross, J. Eisert, N. Schuch, and D. Perez-Garcia, *Phys. Rev. A* **76**, 052315 (2007); D. Gross, Ph.D. thesis, Imperial College London (2008).
- [11] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. F. Werner, *J. Phys. A* **24**, L185 (1991).
- [12] F. Verstraete, J. I. Cirac, and V. Murg, *Adv. Phys.* **57**, 143 (2008).
- [13] J. I. Cirac and F. Verstraete, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 504004 (2009).
- [14] G. K. Brennen and A. Miyake, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010502 (2008).
- [15] X. Chen, B. Zeng, Z.-C. Gu, B. Yoshida, and I. L. Chuang, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 220501 (2009).
- [16] J. Cai, A. Miyake, W. Dür, and H. J. Briegel, *Phys. Rev. A* **82**, 052309 (2010).
- [17] T.-C. Wei, I. Affleck, and R. Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 070501 (2011).
- [18] A. Miyake, *Ann. Phys.* **326**, 1656 (2011).
- [19] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, *Comm. Math. Phys.* **115**, 477 (1988).
- [20] Y. Li, D. E. Browne, L. C. Kwek, R. Raussendorf, and T.-C. Wei, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 060501 (2011).
- [21] K. Fujii and T. Morimae, arXiv:1111.0919.
- [22] K. Fujii and T. Morimae, arXiv:1106.3377.

Wilson の数値くりこみ群とホログラフィック RG

新潟大学理学部 奥西 巧一¹

Wilson の数値くりこみ群とは、近藤不純物問題を解くために考案されたある種の実空間くりこみ群のことである。近藤問題は物性ではよく知られている問題で、局在スピンによる自由電子の散乱を扱う。たった 1 個の不純物であるが、そのスピン状態に応じてフェルミ面まわりの順位が占有されているされていないの問題が複雑に絡みあうために、本質的な多体問題となる。その研究の歴史は百花繚乱といってよく、厳密解が得られた現在でも多体系のひな形としての輝きは失われてはいない [1]。さて、Wilson のアプローチでは、不純物による S 波の電子の散乱問題を、線形分散を持つ動径方向の自由度についての 1 次元電子系とみなし、さらにエネルギーについての対数離散化を経ることで遷移振幅が指数関数的に変化する 1 次元格子の問題に焼き直すという手続きをとる [2]。この手法はギャップレスの不純物問題で非常に強力であるが、一方、ギャップがあるような場合だと安定固定点の解釈に難があるように思われ、数値的くりこみ群の歴史のなかでも特殊な位置づけにあると考えられる。鍵となるのは、一般的なモデルが 1 粒子レベルで空間座標とエネルギースケールを同時にシフトすることで、全固有値固有ベクトルを導くことができるという拡張された並進対称性を持つことである [1]。この性質をうまく利用することで、低エネルギーの状態を系統的に残しつつ、系の低エネルギー端に現れる局所フェルミ液体固定点にスムーズに到達することができる。さらに指数変形に付随して 1 粒子波動関数が平面波ではなく空間的に局在した波束となるため、自由電子状態のエンタングルメントエントロピーの対数発散も抑えこまれてしまう。なるほど、有限の状態しか扱えない数値計算的にも都合が良くできている。

エネルギースケールの変化を拡張された時空に分解して表現するというやり方は、かなり一般性を持つものである。AdS/CFT の重力理論では計量のとり方には依存するが、境界の CFT に近づくにしたがい長さスケールが指数関数的に変化する理論と考えることもできる。Wilson の理論をホログラフィック RG の一種とみなせる可能性はあるだろう。ただし、現時点では両者の関係は、たんに類似しているというレベルである。AdS/CFT では古典の重力理論であり、一方、Wilson の指数変形されたモデルは量子系であるので、古典重力の UV と IR と同じく解釈できるのかは不明である。また、指数変形モデルは多段のユニタリー変換を経た後に得られるので、その“実空間”方向の物理的な意味はいまのところよくわかっていない。いずれにしても、Wilson の理論のからくりを詳しく分析することは、拡張時空のくりこみ群の理解にとっても重要な示唆を含んでいるはずである。これからの研究の進展が望まれる。

[1] 近藤淳 「金属電子論」(裳華房)

[2] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).

[3] K. Okunishi and T. Nishino, Phys. Rev. B **82** 144409 (2010)

¹E-mail: okunishi@phys.sc.niigata-u.ac.jp

少数スピン系におけるテンソルネットワークと射影の効果

大阪大学大学院 基礎工学研究科 折井 仁嗣¹, 上田 宏², 丸山 勲³

物質の磁性を解明するための数理モデルとして利用される有効スピン模型を取り扱う際、系のヒルベルト空間の次元は、スピンの数に対して指数関数的に増大する。この増大する自由度を有限に抑えつつ系の解析を高精度に行うための数値計算手法は、大規模系を取り扱う際に重要である。1次元系に対して有効である Density Matrix Renormalization Group[1] が高次元系で計算精度を著しく悪くする理由として、取り扱う変分関数が系の次元性に応じたエンタングルメントエントロピー (EE) の area law[2] を満たさないことが挙げられる。2次元系において area law を満たす変分関数を取り扱う計算手法として、Multi-scale Entanglement Renormalization Ansatz(MERA) や Tree Tensor Network (TTN) が開発 [3] されており、より少ない自由度で高精度に系の性質を解析する手段が近年盛んに研究されている。

そこで我々は TTN、MERA、Matrix Product State、Tensor Product State のテンソルネットワークに対して、系の基底状態が満たすべき対称性に応じた2種類の射影演算子 (total $S_z=0$ の部分空間への射影、並進について不変な部分空間への射影) を施した変分関数の最適化を行い、射影をしていない変分関数との比較を行った。計算対象としてサイト数 N のスピン $S = 1/2$ ハイゼンベルグ模型を用意し、1次元で周期境界条件を課したもの ($N = 8, 16$) と2次元正方格子で周期境界条件を課したもの ($N = 16$) において基底状態の変分エネルギーと系を2分した際の EE を計算した。ネットワークを構成するテンソルや行列の成分を変分パラメタとして、滑降シンプレックス法 [4] による最適化を行った。本解析から、ネットワークの詳細によらず、射影演算子が施されることにより自由度の少ないネットワークにおいても大きな EE を表現することが可能になり、より少ない自由度で精密な変分エネルギーが得られることが示された。また、既存のネットワーク以外の評価も $N = 8$ で行い投稿準備中 [5] である。さらに、射影演算子の効果を相互情報量を用いて研究した結果も投稿準備中 [6] である。

参考文献

- [1] S. R. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 2863 (1992).
- [2] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio: Rev. Mod. Phys. **82**, 277 (2010).
- [3] G. Evenbly and G. Vidal, Phys. Rev. B **79**, 144108 (2009); L. Tagliacozzo, G. Evenbly, and G. Vidal, Phys. Rev. B **80**, 235127 (2009).

¹E-mail: orii@aquarius.mp.es.osaka-u.ac.jp

²E-mail: ueda@aquarius.mp.es.osaka-u.ac.jp

³E-mail: maru@mp.es.osaka-u.ac.jp

- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery: *Numerical Recipes in Fortran 90* (Cambridge University Press, New York, 1996).
- [5] M. Orii, H. Ueda, and I. Maruyama, submitted to J. Phys. Soc. Jpn. Supplement (Proc. TOKIMEKI2011).
- [6] M. Orii, H. Ueda, and I. Maruyama, in preparation.

2次元量子反強磁性体における Gapless 端状態とその安定性

青山学院大学 理工学部 佐藤正寛
兵庫県立大学 工学部 鈴木隆史

1 Introduction : 研究背景と動機

近年、トポロジカル絶縁体・超伝導体の研究が精力的に行われている [1]。これらの系は、バルクのトポロジカル量や表面・端のギャップレスモードの性質で特徴付けられており、局所的な秩序をもたない。これらの研究は、自由フェルミオン系に対してトポロジカルな性質を利用した新しい相分類の方法を提供している [2, 3]。一方、1次元の相互作用するスピン系でも、整数スピン反強磁性体における局所的秩序をもたないハルデンギャップ相 [4, 5] が、ある種のトポロジカル相として、以前から知られている。この相を特徴付けるものとして、非局所ストリング秩序変数 [6] や端の自由スピン [5, 7] が知られていたが、最近、ハルデン相をより普遍的に特徴付ける試みが成され、対称性やエンタングルメントに基づく理論が発展している [8, 9]。これらの研究から、2次元のトポロジカル絶縁体とハルデン相には多くの類似点があることに気づかされる。すなわち、トポロジカル絶縁体は、バルクの励起ギャップ、バルクで定義される Z_2 トポロジカル数、up スピンと down スピンの電子が逆向きに進行するギャップレスの端状態 (ヘリカルエッジと呼ばれる)、などで特徴付けられるのに対して、ハルデン相には、バルクのスピングャップ、非局所的な (つまりバルクで定義される) ストリング秩序変数、端の自由スピン、がある訳である。

上記の事実から、以下のような疑問が自然に浮かび上がる：2 又は 3 次元の量子スピン系で、バルクはスピングャップを持ち、かつ、ギャップレスの端状態を有する相は実在するだろうか?、またその相をトポロジカル絶縁体のように特徴付けることは可能であろうか?。この間に (部分的にでも) 答える為に、我々は、2次元量子スピン系において、バルクにスピングャップがあり端にギャップレスモードが期待される模型に焦点を当てて、特にその端の性質を量子モンテカルロ法を用いて解析した [10]。この解析結果について以下で簡単に紹介する。

2 ダイマー相を持つ模型

さて、2次元量子スピン系において、バルクにスピングャップがあり端にギャップレスモードが期待される状態の中でも、理論家が容易に連想する例として図 1(a) のような 2次元の Valence-bond-solid (VBS) 状態が挙げられる。しかし、現状ではこのような 2次元 VBS 状態を基底状態とする模型はすべて非現実的な toy モデルであり、近年発展が目覚ましい冷却原子系を利用したとしてもその実現は非常に難しいと言えよう。

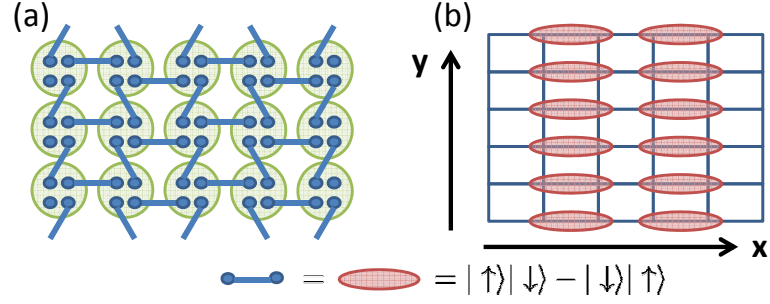


図 1: (a)2次元スピン 2 の系の VBS 状態の例。大きな がスピン 2 を表し、小さな がスピン 2 を 4 つに分割したときのスピン 1/2 を表す。太い棒で結ばれているスピン 1/2 のペアはシングレットを構成している。端にシングレット対を組めずに自由なスピン 1/2 が生き残っていることが分かる。(b) ダイマー状態の例。楕円はシングレット対 (valence bond) を意味する。端 (y 方向) に 1 次元スピン鎖が有効的に現れることが予想される。

「2次元 VBS 状態以外の現実的量子系の中からギャップレスエッジを持つ状態を探せ」という条件を課すと、図 1(b) のようなダイマー状態がすぐに連想される。実際、図のようなダイマー状態はスピン・パイエルス不安定性を持つ物質で実現される。この図から、バルクは当然ダイマー形成による有限のスピンギャップを持ち、かつ、端には有効的に 1 次元スピン鎖が現れてギャップレスの端状態が実現する、と予想できる。

ダイマー相は大別して、自発的なダイマー秩序相 (自発的に並進対称性が破れた相) と外因的にダイマー化した相 (自発的対称性の破れなし) の 2 種類考えられる。この 2 つを実現するモデルとして、 JQ_3 模型 [11] とダイマー化された反強磁性ハイゼンベルグ模型 (以下ダイマー模型と略記する) [12] が考えられる。各々のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{JQ_3} = \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} J \vec{S}_{\vec{r}} \cdot \vec{S}_{\vec{r}'} + Q_3 \sum_{\langle i,j,k,l,m,n \rangle} C_{i,j} C_{k,l} C_{m,n}, \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_{\text{dimer}} = \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} J(1 + \delta(-1)^{|r_x - r'_x|}) \vec{S}_{\vec{r}} \cdot \vec{S}_{\vec{r}'} \quad (2)$$

で与えられる。ここで $\vec{S}_{\vec{r}}$ はサイト $\vec{r} = (r_x, r_y)$ のスピン 1/2 演算子であり、交換相互作用 $J > 0$ は反強磁性的である。両模型とも第 1 項は最近接のハイゼンベルグ型相互作用を表している。 JQ_3 模型の第 2 項において、 $C_{i,j} = \frac{1}{4} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ であり、和 $\sum_{\langle i,j,k,l,m,n \rangle}$ はあらゆる隣接するブラケット (長方形) 内の平行な 3 本の列 $(i,j)(k,l)(m,n)$ で積 $C_{i,j} C_{k,l} C_{m,n}$ を取れ、という意味である。一方、ダイマー模型の δ に比例する部分は、ボンド交替項であり、これにより x 方向の相互作用に強弱が生まれ、ダイマー状態を誘導する。両モデルとも適当なゲージ変換をスピン演算子に施すことで量子モンテカルロ法における負符号問題を回避することができるため高精度の解析が可能である。

この 2 つの模型の基底状態相図はかなり精密に数値解析されており、 Q_3 項 (またはボンド交替 δ) を十分大きくすると、南部ゴールドストーンモードが存在する Néel 秩序状態からダイマー状態に転移することが分かっている [11, 12]。このダイマー状態の端の物性を以下で解析していく。

3 Bulk 方向と edge 方向のスピンの相関関数

JQ_3 模型とダイマー模型のダイマー状態が実現するパラメータ領域において、スピンギャップより低エネルギー域に注目すれば、有効的にスピン 1/2 反強磁性鎖が端に現れることが予想される (図 1(b))。純粋な 1 次元スピン 1/2 反強磁性鎖では、ギャップレスのスピン励起が低エネルギー物理を支配するいわゆる朝永ラッティンジャー (TL) 液体 [13] が実現する。TL 液体相では、ギャップレス性を反映して、縦・横スピン相関関数は

$$\langle S_r^+ S_0^- \rangle \sim (-1)^{|r|} A_{xy} |r|^{-\eta_x} + \dots, \quad (3)$$

$$\langle S_r^z S_0^z \rangle \sim M^2 + \cos(2k_F r) A_z |r|^{-\eta_z} + \dots \quad (4)$$

と長距離で冪的に振る舞うことが知られている。 $M = \langle S_r^z \rangle$ は一様磁化、 $A_{xy,z}$ は適当な定数、 k_F は磁化 M で決まる”フェルミ”波数である。臨界指数の間には $\eta_x \eta_z = 1$ が成り立つ。

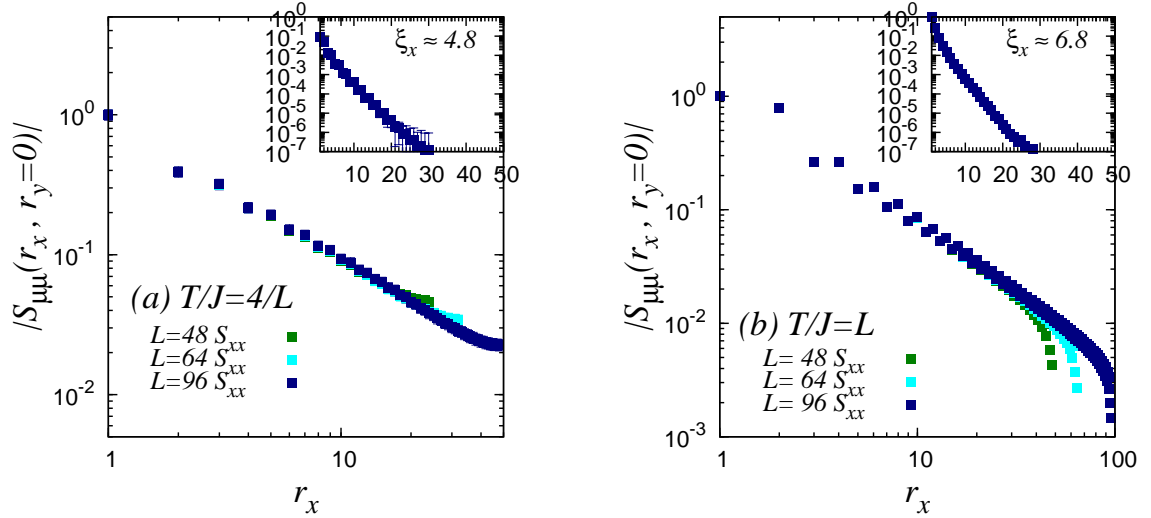


図 2: (a) JQ_3 模型と (b) ダイマー模型のダイマー相内におけるエッジ方向のスピン相関関数 $S_{\mu\mu}(r_x, r_y) = \langle S^\mu(r_x, r_y) S^\mu(0, 0) \rangle$ (両 log グラフ)。 L は $x(y)$ 方向の全サイト数。振幅は適当に規格化してある。Inset はバルク方向のスピン相関関数 (片 log グラフ)。模型のパラメータの値は本論文に譲る [10]。

この事実を踏まえて、 JQ_3 模型とダイマー模型のダイマー相において、エッジ方向 (図 1(b) の y 方向) とバルク方向 (図 1(b) の x 方向) のスピン相関関数を量子モンテカルロ法で評価した。ここでエッジ方向には周期境界 $\vec{S}_{r_x, N_y+1} = \vec{S}_{r_x, 1}$ (N_y は y 方向の全サイト数) 又は自由境界 (open boundary) 条件を課し、バルク方向は常に自由境界にしている。温度 T はバルクのスピンギャップに比べて十分低温に設定し、ほぼ $T = 0$ の物性が観測出来ていると考えられる。結果は図 2 にまとめた。予想通り、エッジ方向の縦・横スピン相関共に冪的に振舞い、一方でバルクのスピンギャップを反映して、バルク方向の相関関数は指数関数的に減衰している。これは明らかにエッジにギャップレスモードが実現していることを意味する。ここで、エッジ方向の冪減衰が、バルク方

向の相関距離に依らずに常に生き残る、という点を強調したい。すなわち、ダイマー相に入っていれば、隣の Néel 相との距離に関わらずギャップレスエッジモードが実現している、ということである (但し、相転移点の近傍でエッジの性質が変化するか否かまでは現精度の計算からは結論できない)。

4 Edge 状態の安定性

さて、上の節で、ダイマー相におけるエッジのギャップレス性のある種の安定性を見た。ここで最後に、模型に様々な現実的な摂動を加えた際のエッジモードの安定性を考察しよう。摂動として以下の5つを考える：外部磁場 H によるゼーマン項、XXZ 型の磁気異方性、ジャロシンスキー守谷 (DM) 相互作用、 y 方向のダイマー項、次近接相互作用項。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Zeeman}} &= -H \sum_{\vec{r}} S_{\vec{r}}^z, & \mathcal{H}_{\text{XXZ}} &= \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} J \Delta_z S_{\vec{r}}^z S_{\vec{r}'}^z, & \mathcal{H}_{\text{DM}} &= \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} D_{\vec{r}, \vec{r}'}^z (\vec{S}_{\vec{r}} \times \vec{S}_{\vec{r}'})^z, \\ \mathcal{H}_y &= \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} J \delta_y (-1)^{|r_y - r'_y|} \vec{S}_{\vec{r}} \cdot \vec{S}_{\vec{r}'}, & \mathcal{H}_{\text{nnn}} &= \sum_{\vec{r}, \vec{e}} E_{xy} (S_{\vec{r}}^+ S_{\vec{r}+\vec{e}}^- + \text{h.c.})/2 + E_z S_{\vec{r}}^z S_{\vec{r}+\vec{e}}^z. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、DM ベクトル $\vec{D}_{\vec{r}, \vec{r}'} = (0, 0, D_{\vec{r}, \vec{r}'}^z)$ は S^z 方向と仮定した。また次近接項 \mathcal{H}_{nnn} において $|\vec{e}| = 2$ である。4つの項 $\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}$ 、 \mathcal{H}_{XXZ} 、 \mathcal{H}_{DM} 、 \mathcal{H}_y は、各々、時間反転対称性、スピン回転 $SU(2)$ 対称性、ボンドパリティ対称性、 y 方向の並進対称性を破る摂動である。一方、 \mathcal{H}_{nnn} は、 $SU(2)$ 対称な場合 ($|E_{xy}| = |E_z|$)、元の模型の対称性を低下させない摂動である。

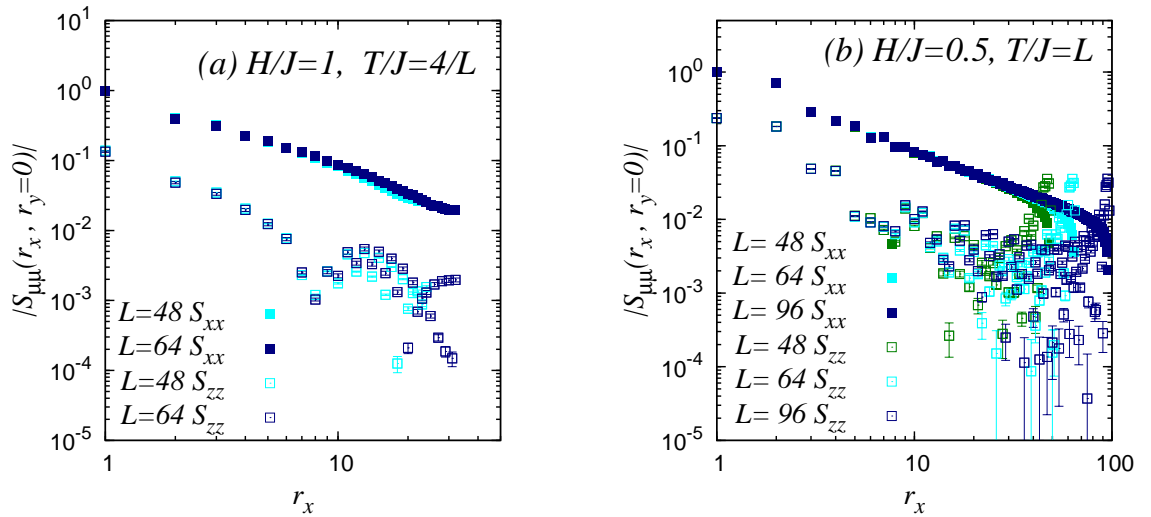


図 3: (a) JQ_3 模型と (b) ダイマー模型に磁場 $\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}$ を印加した際のエッジ方向のにスピン相関関数。バルク方向の相関は指数関数型のままである。以下の図では、横相関 S_{xx} は数値計算上の技術的問題のため適当に規格化してある。

これらの摂動を加えた際のスピン相関関数の量子モンテカルル法による評価を図 3 と 4 にまとめた。ここで技術的な問題から JQ_3 模型にはゼーマン項しか摂動として加えられないことを注意しておく。また負符号問題を避ける為に、 $E_{xy} < 0$ としている。

図3から、ギャップレスエッジモードが磁場に対して安定であることが分かる。磁化が端(のみ)に発現していることを反映して、縦スピン相関は振動しながら減衰している。このギャップレス性の磁場に対する安定性は、1次元のハルデン相の端スピンとは対照的である。図4からは、エッジモードが摂動項(5)の中で \mathcal{H}_y に対してのみ不安定で、これを印加するとすぐにエッジ相関もバルクと同じように指数関数減衰型になってしまうことが分かる。ところで、トポロジカル絶縁体のヘリカルエッジ状態は時間反転対称性を保つあらゆる摂動に対して安定であることが知られている。従って、ダイマー状態のエッジ物性の中で、上記の2点(磁場に対する安定性と並進対称性の破れに対する脆弱性)は、トポロジカル絶縁体との大きな相違点と言えよう。一方で、ダイマー状態のエッジもトポロジカル絶縁体と同じように多くの現実的摂動に対して安定であることも注目に値する。

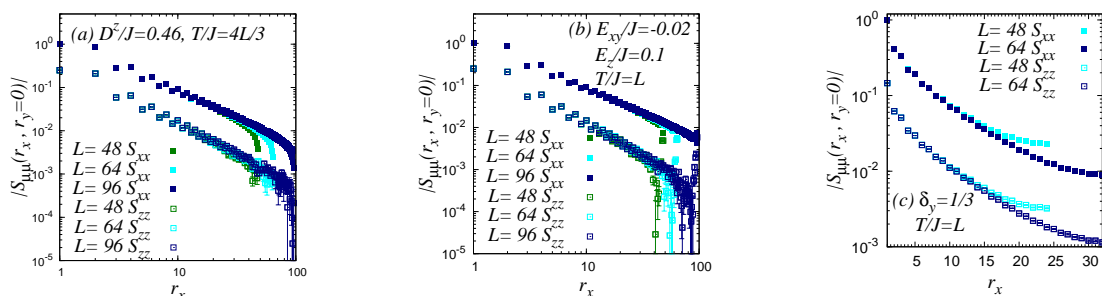


図4: ダイマー模型に摂動 (a) \mathcal{H}_{DM} 、(b) $\mathcal{H}_{nnn}(E_{xy} < 0)$ 、(c) \mathcal{H}_y を加えた際のエッジ方向のスピン相関関数。 $\mathcal{H}_{dimer} + \mathcal{H}_{DM}$ は適当なユニタリー変換で容易面型のダイマー模型 $\mathcal{H}_{dimer} + \mathcal{H}_{XXZ}$ に変換できる。バルク方向は指数関数型のままである。(c)のみ片logグラフであることに注意。

5 まとめと観測可能性

我々は、2次元量子スピン系の中で、バルクはギャップを持ち、エッジにギャップレスモードがある現実的系として、ダイマー状態に焦点を当てた。これを実現する2つの模型(JQ_3 模型とダイマー模型)に対して量子モンテカルロ法を応用し、バルクとエッジの性質を解析した。その結果、実際にダイマー状態でギャップレスのエッジ状態が実現していることを定量的に明らかにした。さらにそのエッジモードの各種摂動に対する安定性も解析し、特にゼーマン項に対する安定性(トポロジカル絶縁体やハルデン相の端スピンと対照的)とエッジ方向のダイマー化に対する不安定性を明らかにした。ダイマー状態はある程度端の性質が予想できる系であるが、この系の端状態の性質は、2次元量子スピン系においてより非自明な端状態をもつギャップ相が実現した際の参照点としても役立つと考えられる。すなわち、非自明なギャップ相の端状態の安定性を議論する際、ダイマー状態の端より安定か否かが1つの目安となるだろう。

最後に、ダイマーの端状態の実験観測可能性をについて述べる。理想的なエッジを持つ2次元スピン系が実現できれば、例えば熱伝導に端の特性が現れると考えられる。単純なギャップ系の熱伝導との違いを見ることが1つの端状態の検出方法になり得るだろう。また核磁気共鳴(NMR)の

ような局所的なプローブは端を見るのに有効と考えられる。うまくいけば、端の TL 液体的振る舞い [13] が NMR の緩和率から読み取れる可能性がある。さらに理想的な端を持つ系で中性子散乱実験が仮に可能であれば、トポロジカル絶縁体 [1] の光電子分光の図と同じように、散乱スペクトルの中に、スピングャップのあるパルクの寄与のほかにギャップレスなスピノン対による連続スペクトルが期待される。

参考文献

- [1] 例えば M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010); X.-L. Qi and S. C. Zhang, arXiv:1008.2026.
- [2] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, *Phys. Rev. B* **78**, 195125 (2008).
- [3] A. Kitaev, *AIP Conf. Proc.* 1134, 22 (2009).
- [4] F.D.M. Haldane, *Phys. Lett.* **93A**, 464 (1983); *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153 (1983).
- [5] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 799 (1987); *Commun. Math. Phys.* **115**, 477 (1988).
- [6] M. den Nijs and K. Rommelse, *Phys. Rev. B* **40**, 4709 (1989); H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 798 (1991).
- [7] T. Kennedy and H. Tasaki, *Phys. Rev. B* **45**, 304 (1992); *Commun. Math. Phys.* **147**, 431 (1992).
- [8] F. Pollmann, E. Berg, A. M. Turner, and M. Oshikawa, arXiv:0909.4059; F. Pollmann, A. M. Turner, E. Berg, and M. Oshikawa, *Phys. Rev. B* **81**, 064439 (2010).
- [9] Z.-C. Gu and X.-G. Wen, *Phys. Rev. B* **80**, 155131 (2009); X. Chen, Z.-C. Gu, and X.-G. Wen, *Phys. Rev. B* **83**, 035107 (2011).
- [10] T. Suzuki and M. Sato, in preparation; 日本物理学会 2011 年秋季大会 23pTR-7.
- [11] J. Lou, A. Sandvik, and N. Kawashima, *Phys. Rev. B* **80**, 180414(R) (2009).
- [12] M. Matsumoto, C. Yasuda, S. Todo, and H. Takayama, *Phys. Rev. B* **65**, 014407 (2001).
- [13] 例えば T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension*, (Oxford Univ. Press, 2004).

テンソルネットワーク上での量子計算

— String-net condensate での例を通して —

パリ東大学、東工大 森前智行¹

従来量子計算機のモデルは回路モデルとよばれるものであった。近年、Measurement-based 量子計算という新しいモデルが注目を集めている。これは、まず最初に量子多体系を用意し、あとは各粒子を測定するだけで、量子計算を行うというモデルである。最初に用意する量子多体系の物性的性質（エネルギー、温度、ギャップ、ハミルトニアン、相関、トポロジカルオーダー、エンタングルメント等）が、Measurement-based 量子計算にどう関係してくるのか、ということを見ると、物性物理と量子情報のつながりが見えてくる。

Measurement-based 量子計算は、一般的に、テンソルネットワークを用いて記述することができる。テンソルネットワークは、1次元の場合特に Matrix-product state として知られているが、複雑な量子多体系を、テンソルや行列を用いて効率的に記述する方法である。複雑な量子多体系を扱う物性物理においては非常に重要な手法であり、繰り込み等に応用されている。

本講演では、この、テンソルネットワークを用いた Measurement-based 量子計算を物性の視点から分かりやすく説明するとともに、我々が最近得た、String-net condensate での Measurement-based 量子計算の結果についても報告する。

謝辞

本研究の一部は ANR (StatQuant JC07 07205763) の補助を受けた。

参考文献

- [1] R. Raussendorf and H.-J. Briegel, Phys. Rev. Lett. 86, 5188 (2001).
- [2] D. Gross and J. Eisert, Phys. Rev. Lett. 98, 220503 (2007).
- [3] T. Morimae, arXiv:1012.1000

¹E-mail: morimae@gmail.com

三角格子上的格子モデルのためのエンタングルメント繰り込み

京都大学 大学院情報学研究科 原田 健自¹

幾何学的なフラストレーションのある量子格子モデルの数値計算手法は限られている。代表的な手法は厳密対角化と変分法である。厳密対角化は小さな系の基底状態等を計算するのに向いているが格子サイズを大きくすることは困難である。一方、変分法はより大きな格子サイズにも適用可能であるが、変分試行関数によるバイアスがあるため注意が必要である。

最近、テンソルネットワークと呼ばれる新しいクラスの波動関数が量子情報分野の研究に基づいて提案されている。テンソルネットワークは量子状態の確率振幅がテンソル縮約の形で定義されている波動関数である。一般的にこのようなテンソル縮約構造はネットワーク図として記述できるため、テンソルネットワーク状態と呼ばれている。例えば、図1(B)のような1次元量子系を記述するテンソルネットワーク状態は、行列積の形をしているため、行列積状態と呼ばれている。テンソルネットワークは量子エンタングルメントに対する考慮に基づき構築されており、一般的な多体系の量子状態をコンパクトに記述できるツールとして期待されている。

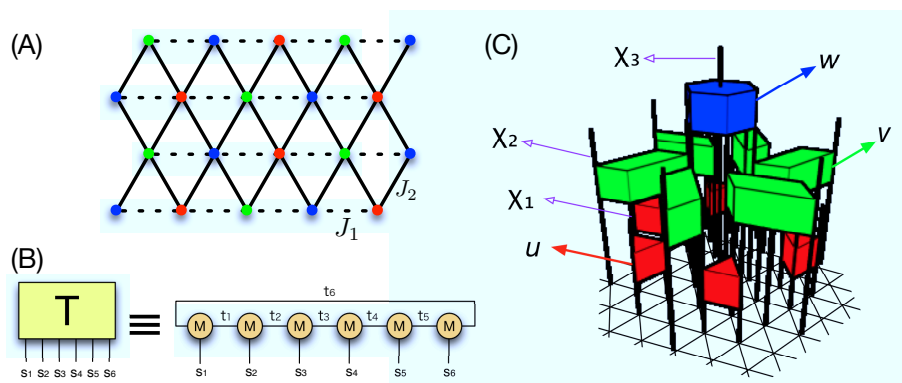


図 1: (A) 空間異方性のある三角格子. (B) 行列積状態. (C) 三角格子上的 MERA.

我々は幾何学的なフラストレーションとして代表的な三角格子を取り上げ、三角格子上的格子モデルの量子状態を記述するテンソルネットワークを提案した(図1(C)). このネットワークは Vidal によって提案された MERA[1] と呼ばれるクラスに属しており、エンタングルメント繰り込みを三角格子上でやっている。エンタングルメント繰り込みとは、“局所的なエンタングルメントを弱めて行う実空間繰り込み”の事である。この概念

¹E-mail: harada@acs.i.kyoto-u.ac.jp

を用いた MERA テンソルネットワーク変分波動関数は、強い量子的相関のある量子状態に対する記述能力が高く、量子多体系のバイアスの少ない変分計算への応用が期待されている。

我々はこのテンソルネットワークを空間異方性のある三角格子上の $S=1/2$ 反強磁性ハイゼンベルグモデル (図 1(B)) の基底状態に対する変分計算に適用した。その結果、幅広い領域で基底状態が精度よく求まり、特に $0.7 \leq J_2/J_1 < 1$ の範囲では基底状態が非整合な波数を持つスパイラル状態であることがわかった。

参考文献

- [1] G.Vidal, Physical Review Letters, **99** (2007), 220405.