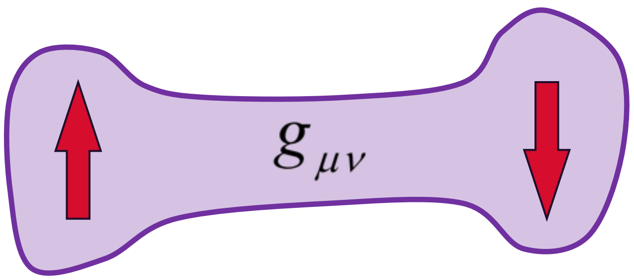
京大基研研究会「量子多体系のエンタングルメントとくりこみ群」, 2011年12月

AdS/CFT対応とエンタングルメント・エントロピー

高柳　匡　(東京大学、IPMU)



本講演と直接関係する論文

Ryu-TT, hep-th/0603001, PRL96(2006)181602.

Ryu-TT, hep-th/0605073, JHEP0608:045,2006.

Nishioka-TT, hep-th/0611035, JHEP 0701:090,2007.

Headrick-TT, arXiv:0704.3719, Phys.Rev.D76:106013,2007.

Hubeny-Rangamani-TT, arXiv:0705.0016, JHEP0707:062,2007.

Li-TT, arXiv:1010.3700, PRL 106(2011)141301.

Ugajin-TT, arXiv:1008.3439, JHEP 1011:054,2010.

Ogawa-TT, arXiv:1107.4363, JHEP 1110:147, 2011.

Ogawa-Ugajin-TT, arXiv:1111.1023.

[レビュー]

Nishioka-Ryu-TT, arXiv:0905.0932, J.Phys.A42:504008,2009.

笠-高柳, 日本物理学会誌 62(2007)421

内容

① はじめに

② 場の理論の幾何学的エントロピー

③ AdS/CFTをエンタングルメント・エントロピー

④ AdS/CFTでランダウのフェルミ液体は実現可能か？

⑤ おわりに

①はじめに

エンタングルメント・エントロピーとは？

Quantum Entanglement (量子もつれ合い、絡み合い)
の度合いを測定する量

⟹「基底状態がどれほど量子的に複雑か？」をあらわす。

現在まで、様々な分野に応用されてきている。

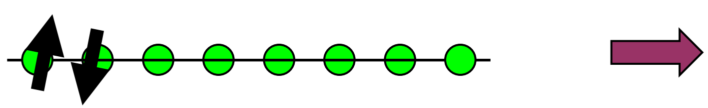
- 量子情報、量子コンピューター（量子情報量の定義）
- 物性理論（低次元量子多体系のオーダーパラメーター）
- 量子重力理論（ブラックホールのエントロピーとの関係）

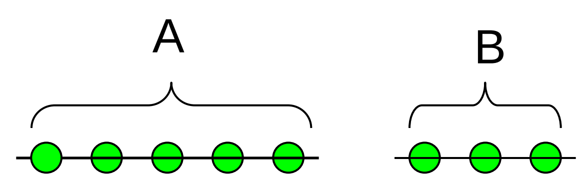
エンタングルメント・エントロピーの定義

まず、多体系の量子力学において、全体系を部分系AとBに二分割する。このとき、もとのHilbert空間は、二つのHilbert空間の直積に分かれる

$$H_{tot} = H_A \otimes H_B \quad .$$

具体例：　スピン系を2分割する。





全体系の密度行列を ρ_{tot}とする。
例えば絶対零度（純粋状態）では、$\rho_{tot} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ 。

このときBを観測しない（Bをトレースアウトする）と仮定した場合の密度行列は、

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{tot} \quad ,$$

と書け、これをAに制限した密度行列と呼ぶ。

注：　演算子O_AがBの情報に依存しない場合

$$\langle O_A \rangle = \mathrm{Tr}[O_A \cdot \rho_{tot}] = \mathrm{Tr}_A[O_A \cdot \rho_A] \quad .$$

この設定で、「Aに関するエンタングルメント・エントロピー」S_A を ρ_A に対するフォン・ノイマンエントロピーとして定義する。

$$\boxed{S_A = -\mathrm{Tr}_A\, \rho_A \log \rho_A \quad .}$$

もともとの系が純粋状態すなわちS=0であっても、部分系Bを見えないと仮定することで、S_A は一般に非自明になることに注意。

エンタングルメント・エントロピーの基本的性質のまとめ

(i)　AとBの間に相互作用がなく独立 ➡ $S_A = S_B = 0$.

(ii)　全体系が純粋状態の場合 ➡ $S_A = S_B$.

熱力学エントロピーと違って示量的ではない！

(iii)　有限温度では、一般に $S_A \neq S_B$ である。
特に高温極限では、

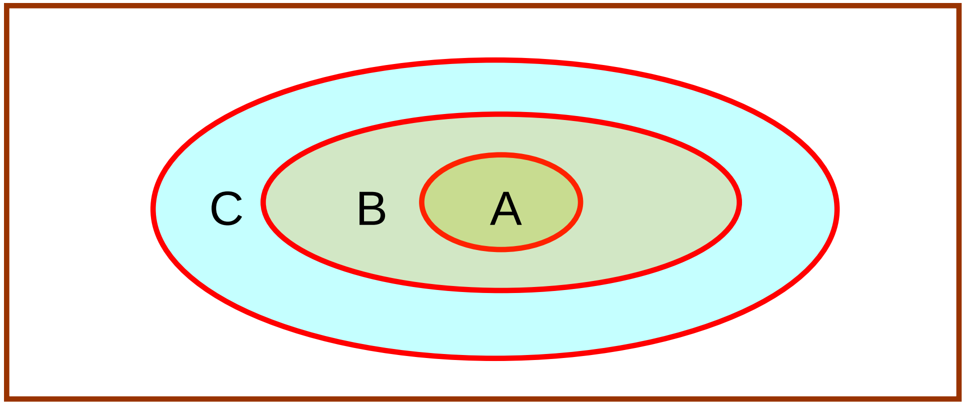
$$S_A - S_B \approx \text{熱力学的エントロピー}$$

(iv) 強劣加法性(Strong Subadditivity)

[Lieb-Ruskai 73； See also Nielsen-Chuang' text book]

$$\boxed{S_{A+B+C} + S_B \leq S_{A+B} + S_{B+C} \quad .}$$

ある種の凸性(Concavity)を表す

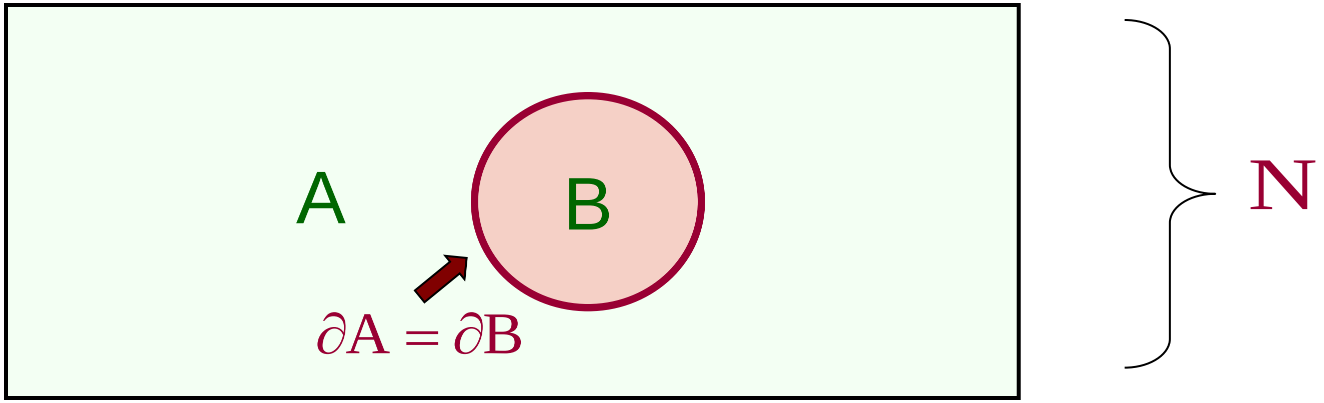


②場の理論における幾何学的エントロピー

場の理論におけるエンタングルメント･エントロピーを考える。
時空Mは、d+1次元で定義され、静的であるとする。

$$M = R_t \times N.$$

このときHilbert空間をAとBの二つに分けるのを幾何学的に行なえる。(幾何学的エントロピーとも呼ばれる。)



幾何学的エントロピーの物理的意味

(i)　観測者がBを観測できないと仮定したときに生じる
あいまいさ　→　ブラックホールのエントロピーと類似

(ii)　AとBの（非局所的）相関
相関関数よりもウイルソンループに近いが、どんな場の理論でも定義可能。　→　量子相転移に応用可能

(iii)　場の理論の自由度の一つの見積もり
→　実際、2次元では、共形場理論のcentral charge に比例する。後述するように、高次元でも似ている。

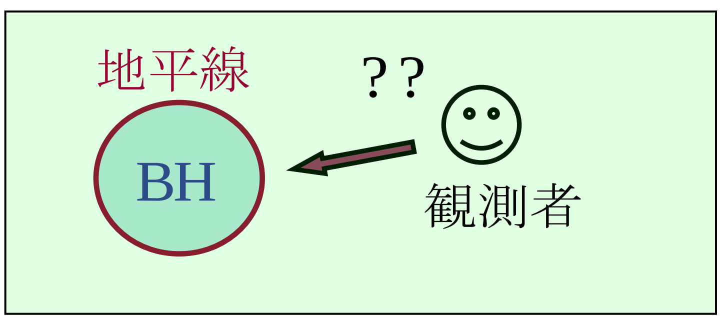
幾何学的エントロピーの面積則

場の理論は、無限の自由度を有するので、幾何学的エントロピーは紫外発散する。そのとき、最高次の項に関して次の面積則が知られている（aは正規化のための格子間隔）。

$$S_A \sim \frac{\mathrm{Area}(\partial A)}{a^{d-1}} + (\mathrm{subleading\ \ terms}).$$

[Bombelli-Koul-Lee-Sorkin 86, Srednicki 93]

これはブラックホールのエントロピーの面積則に似ている。



実際に、量子補正に対応していると考えられている。

[Susskind-Uglm 94']

でも、BHエントロピーの古典的な項自体は？

高次元系の幾何学的エントロピーを計算は、一般に技術的に面倒。解析的な結果は、相互作用する場の理論の場合は、現在でもほとんどない。（自由場計算や数値計算は存在する）

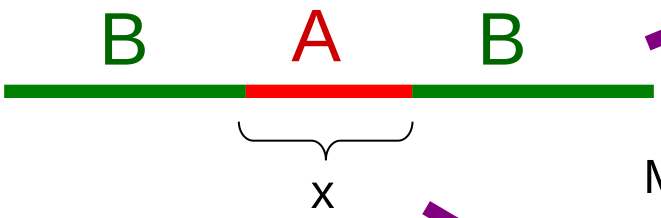
⟶ AdS/CFTによる計算法を開発する動機

2次元共形場理論の場合

しかしながら、2次元共形場理論においては、厳密な計算が可能である。 [Holzhey-Larsen-Wilczek 94,…, Calabrese-Cardy 04]

部分系A ＝ 1次元空間中の線分

具体例(2次元CFT)



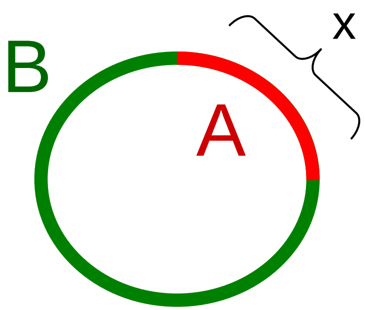
$$S_A = \frac{c}{3}\log\frac{x}{a}$$

Mass gap

$$S_A = \frac{c}{3}\log\frac{\xi}{a}$$

Finite Temp.

$$S_A = \frac{c}{3}\log\left(\frac{\beta}{\pi a}\sinh\left(\frac{\pi x}{\beta}\right)\right)$$



$$S_A = \frac{c}{3}\log\left(\frac{L}{\pi a}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$$

③ AdS/CFTとエンタングルメント・エントロピー

高次元(d+1>2)の場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算は、煩雑な量子的計算になる。

またブラックホールのエントロピーとの関係の理解を深めるには、その重力的解釈が欲しい。

そこで、AdS/CFT対応を思い出してみると、この両方の問題を解決する可能性が期待できる。

量子的な物理量　　微分幾何学的量

共形場の理論　　重力理論

(3-1) AdS/CFT 対応

[Maldacena 97]

AdS/CFT

(d+1)次元反ドジッター(AdS)空間上の量子重力(超弦)理論 ＝ d次元共形場理論CFT（非可換ゲージ理論）

↓ **古典重力極限**　　　↓ **強結合極限 ラージN極限**

超重力理論(一般相対論) ＝ **強結合系**

基本原理(Bulk-Boundary関係):

$$\boxed{Z_{\text{重力}} = Z_{CFT}}$$

注）AdS/CFTは、**ホログラフィー原理**の特別な場合である。

ホログラフィー原理:時空Mの重力理論＝時空∂M上の非重力理論

AdS/CFTの威力が特に発揮されるのは、

超重力理論の極限 ⇔ 強結合ラージN理論 。

この時に、ユニバーサルな振る舞いをAdS/CFTから理解できる。

（～ブラックホールのNo hair定理）

<u>例1</u> 強結合系の粘性の計算 [Kovtun-Son-Starinets 05]

$$\boxed{\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B}.}$$

（具体例：QGP,Cold Atom)

<u>例2</u> フェルミ面のある強結合(2+1)次元系の比熱

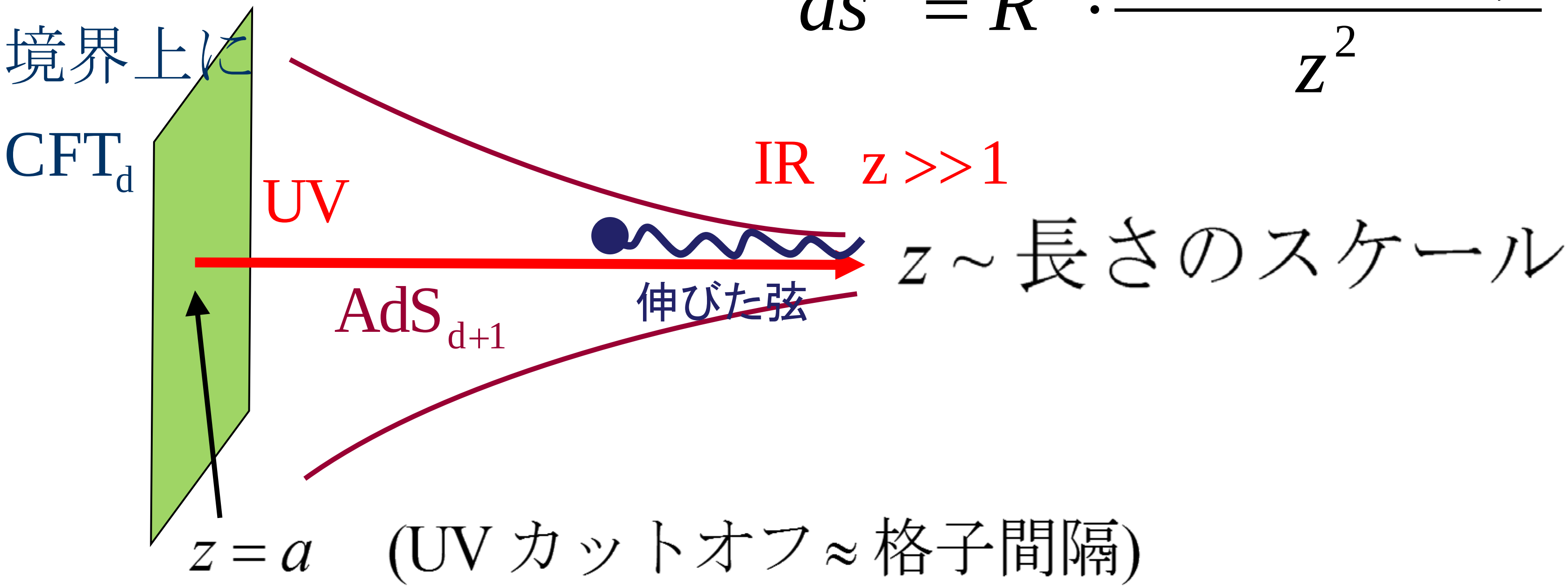
$$\boxed{C \propto T^{\alpha}, \quad \alpha \leq \frac{2}{3}.}$$

[小川-宇賀神-高柳 11]

(具体例：Strange Metal)

AdS/CFT概念図

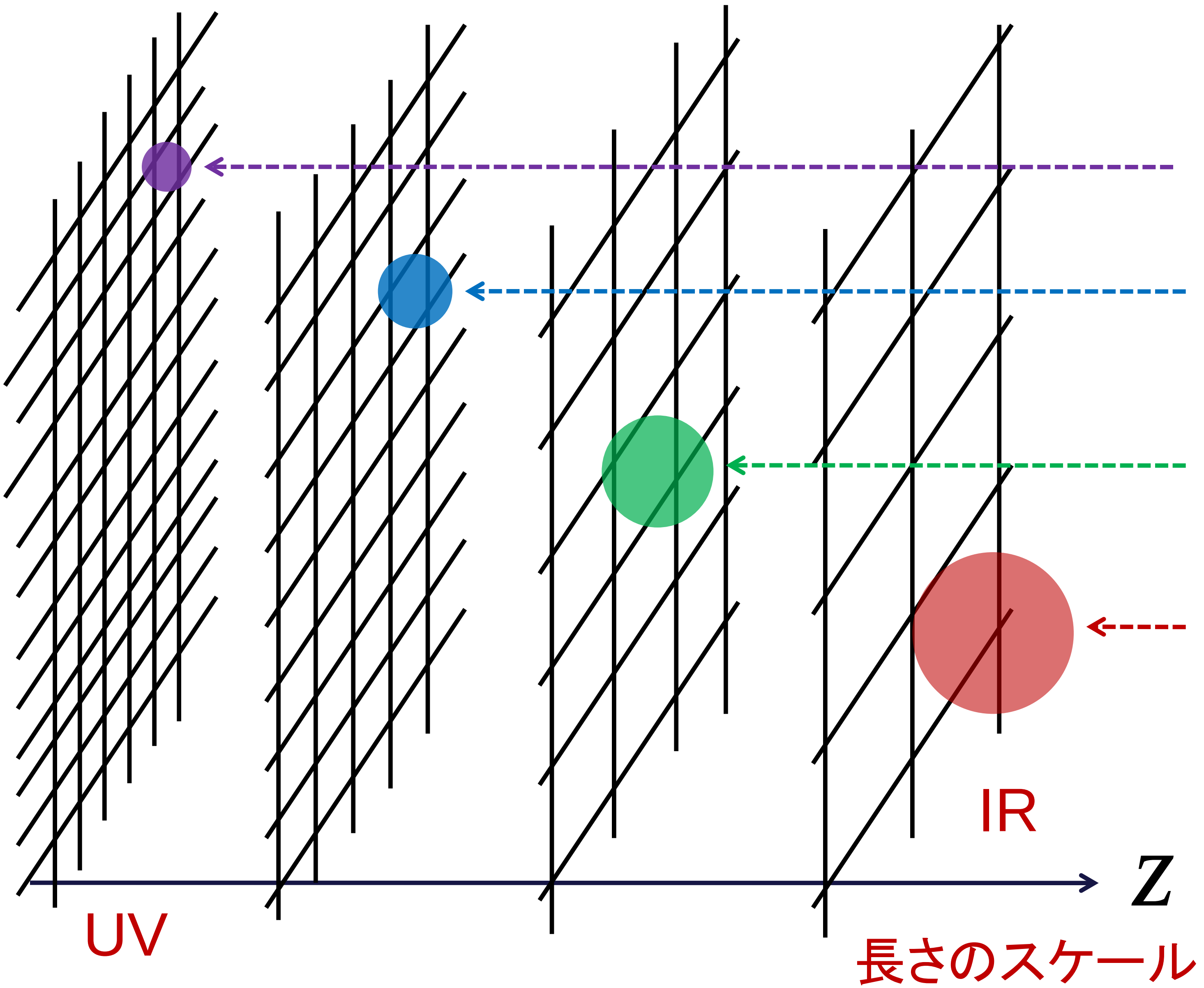
$$ds^2 = R^2 \cdot \frac{dz^2 + dy^\mu dy_\mu}{z^2} \quad .$$



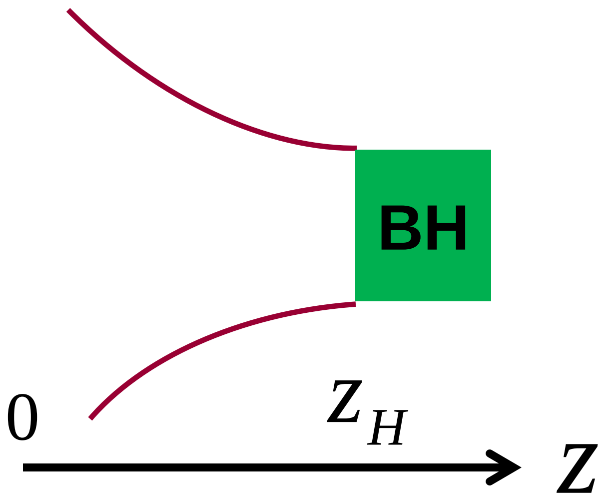
[余分に増えたz座標の意味は？]

z方向（余次元）は、場の理論の繰り込み群における長さのスケールを表す。言い換えると エネルギースケール～1/z.

AdS/CFT対応を「網のふるい」に例えると、



AdS/CFT とブラックホール



AdSブラックホール解

$$ds^2 = R^2\left(-\frac{f(z)}{z^2}dt^2 + \frac{dz^2}{z^2 f(z)} + \frac{dy^i dy_i}{z^2}\right) .$$

$$f(z) \equiv 1-(z/z_H)^d .$$

この解は、有限温度TのCFTと双対となる。

Tは、ブラックホールの温度である:

$$T_{BH} \propto \frac{1}{z_H} .$$

AdS/CFTから分かることは、

ブラックホールの熱力学 ＝ CFT の熱力学

特に、
ブラックホールのエントロピー = 熱力学的エントロピー

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{\text{地平面の面積}}{4G_N}.$$

注）
平坦な時空のブラックホールは、比熱が負であるが、AdS空間における（大きな）ブラックホールは、比熱が正になる。

(3-2) ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー

漸近的にAdS$_{d+2}$に近づく空間

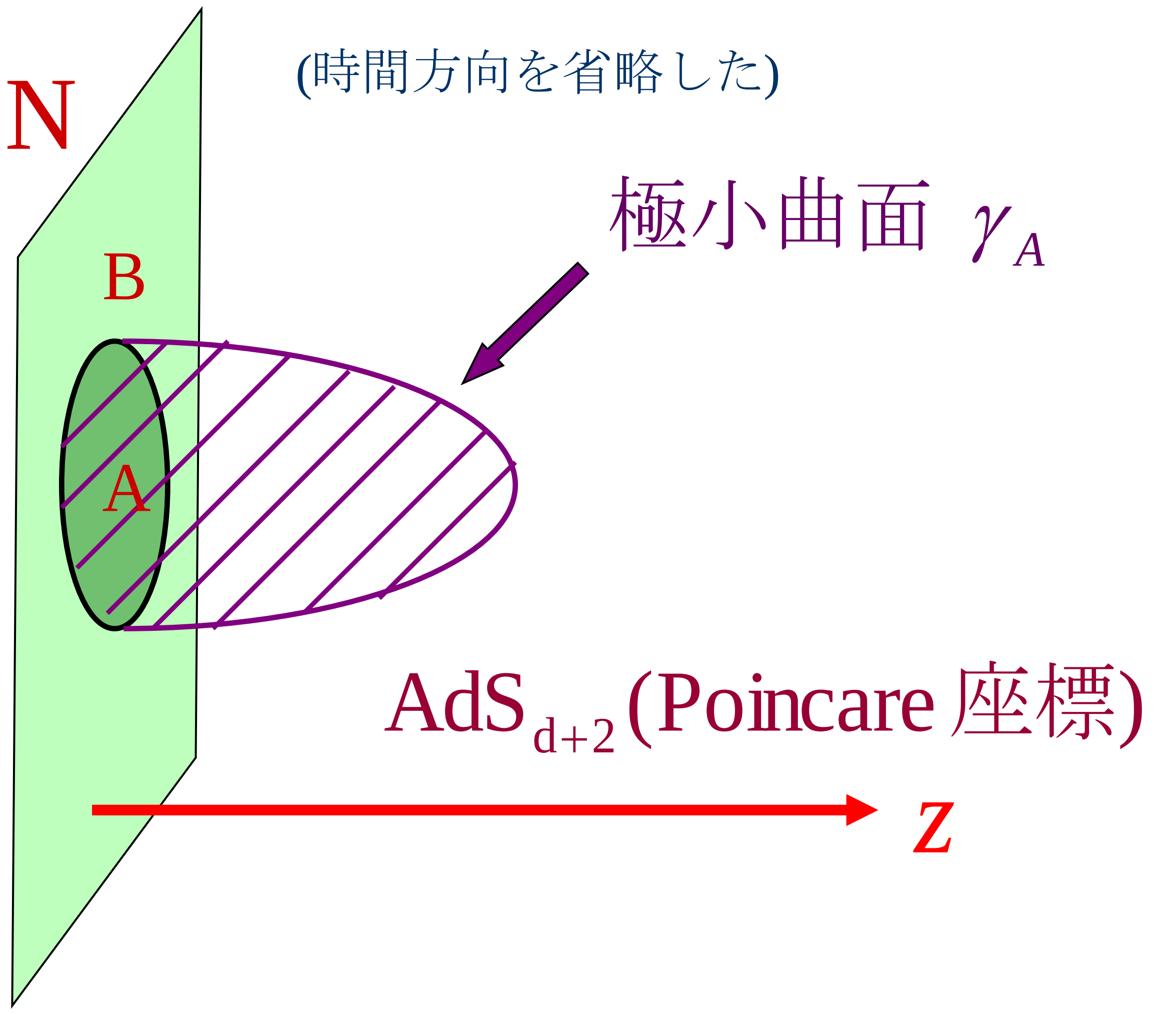
⟺ UV固定点を持つd+1次元の場の理論

この場合には、

$$\boxed{S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_{\mathrm{A}})}{4G_N^{(d+2)}}.}$$

ここで、γ_{A} は、d+2次元時空中のd次元の<u>極小曲面</u>で、境界が部分系Aの境界と一致するもの。[笠-高柳 06]

（厳密な証明はない。直感的な導出は、AdS/CFTのbulk-boundary関係を用いてFursaev 06 で与えられている。）


(時間方向を省略した)
N
B
A
極小曲面 γ_A
AdS_{d+2}(Poincare座標)
z

コメント(1)：

前述の面積公式は、超弦理論の立場では、超重力理論（〜一般相対論）の近似に相当する極限を仮定している。

超弦理論の量子補正には**2種類**ある。

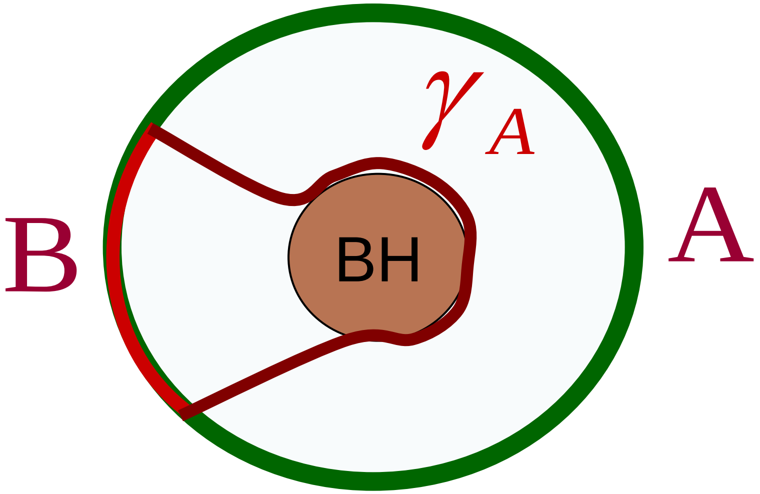
1. 弦の振動による量子補正が小さい　⇔　強結合な量子多体系
2.　量子重力の効果が小さい　⇔　ラージ N 極限
（重力定数が小さい）

超重力理論の近似とは、上の1と2が成り立つ場合に相当する。
1の補正は、面積＋曲率＋…　のように現れる。2はとても難しい。

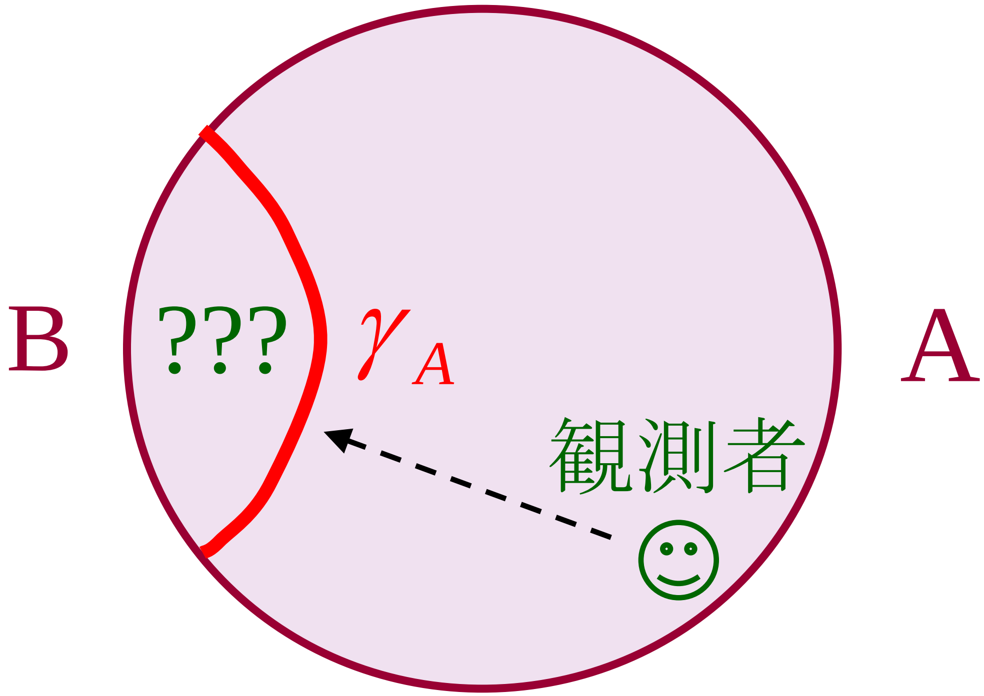
コメント(2):

このホログラフィックな公式は、Bekenstein-Hawkingのブラックホールエントロピーの式と見かけ上同じであるが、γ_A は、一般にホライズンではない。

しかし有限温度のときに現れるAdSブラックホールを考えると γ_A はホライズンの一部を覆う。その寄与は、熱力学的エントロピーに相当する。



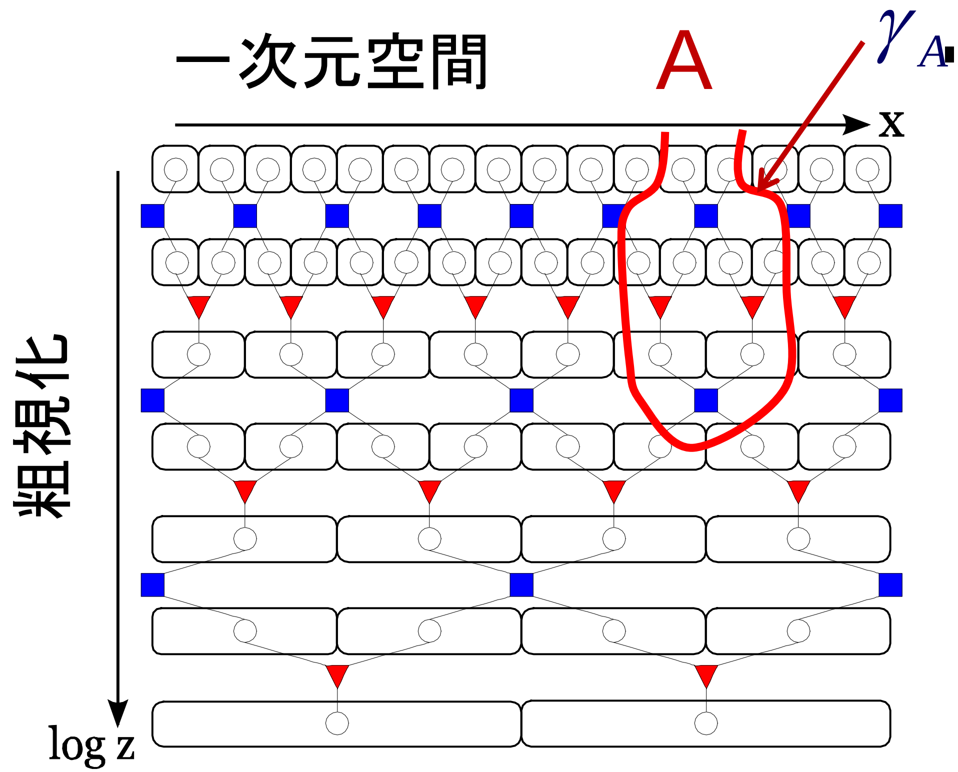
直感的解釈



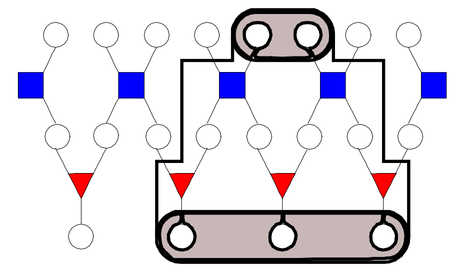
γ_A があたかもブラックホールのホライズンであるかのように振る舞い、Bの情報を中に隠している。

MERAを用いた解釈

［MERA, Vidal et.al. 06’ Swingle 09’,松枝さんの講演]



エンタングルメント・
エントロピーの計算



$$S_A \approx \mathrm{Min}_{\gamma_A}\,[\#\,\mathrm{Bonds}]$$

$$\sim \mathrm{Min}_{\gamma_A}\left[\frac{|\gamma_A|}{4G_N}\right].$$

量子重力の離散化？

コメント(3)

この対応関係は、時間に依存する背景においても用いることができる。その場合、Lorentzianな時空中の極小曲面(平均曲率がゼロな曲面)を見つければよい。

[Hubeny-Rangamani-TT 07]

例: 物体系が崩壊してAdSブラックホールを形成する背景

→ エンタングルメント・エントロピーも増大する。

コメント(4):

幾何学的エントロピーの面積則の導出は、この公式を用いるととても容易である。

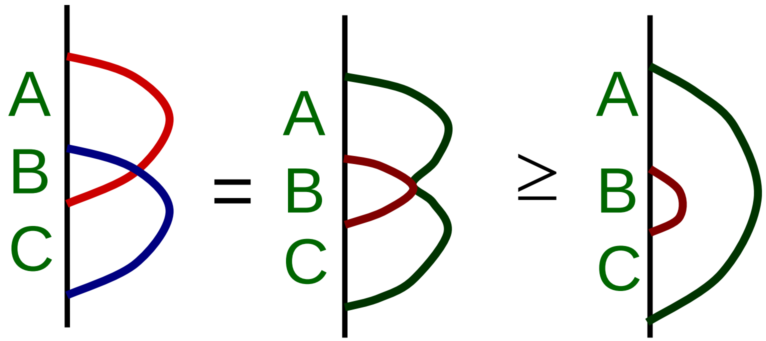
$$\mathrm{Area}(\gamma_A) \sim R^d \cdot \frac{\mathrm{Area}(\partial\gamma_A)}{a^{d-1}} + (\text{subleading terms}).$$

$$\partial\gamma_A = \partial A$$

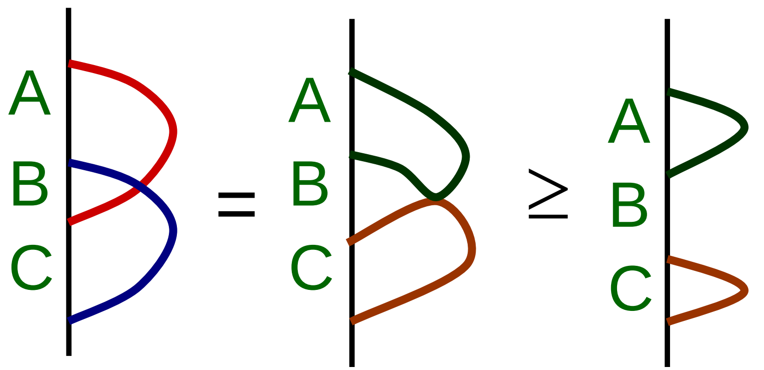
なぜならば、AdSの計量は、境界付近(紫外領域)で発散するからである。

コメント(5) 強劣加法性のAdS/CFTによる証明

[07 Headrick-TT, 06 Hirata-TT]



$$\Rightarrow\ S_{A+B}+S_{B+C}\geq S_{A+B+C}+S_{B}$$



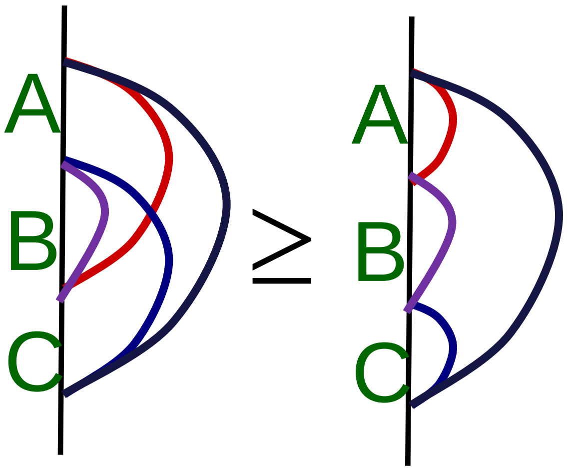
$$\Rightarrow\ S_{A+B}+S_{B+C}\geq S_{A}+S_{C}$$

この証明で明らかなように、余次元が重要な役割をする。
強劣加法性は、一般の量子多体系のホログラフィーの存在を示唆する。

Tripartite Information [Hayden-Headrick-Maloney 11]

最近、***monogamy***という量子情報理論で良く知られた性質がホログラフィック公式に対して成り立つことが指摘された:

$$\boxed{\begin{array}{c} S_{AB}+S_{BC}+S_{AC}\geq S_{A}+S_{B}+S_{C}+S_{ABC} \\ \Leftrightarrow I(A:B)+I(A:C)\leq I(A:BC) \end{array}}$$



コメント:

(i) ホログラフィーを用いた議論で、強結合、弱結合にかかわらず、ラージN極限で成立するという結論が得られる。

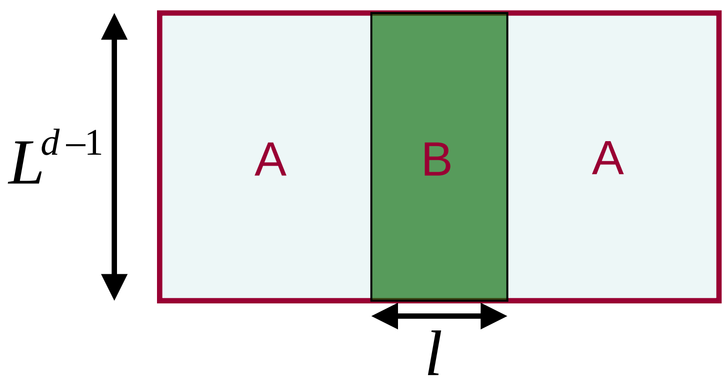
(ii) ギャップがある理論では、Topological Entanglement Entropyが正になるという主張と等価である。

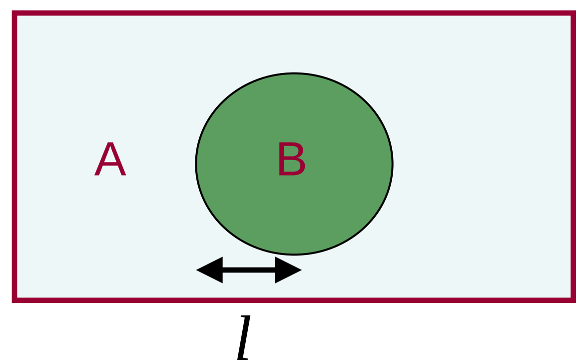
具体的計算

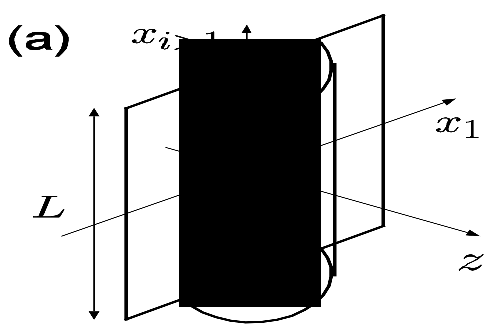
d+2次元のAdS空間の場合に、ホログラフィックな公式を
用いて、次の2つの場合の幾何学的エントロピーを計算してみる。

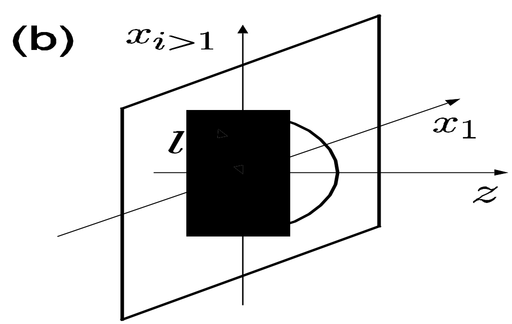
(a) 帯状

(b) 球殻









(a) 帯状の場合

$$S_A = \frac{R^d}{2(d-1)G_N^{(d+2)}}\left[\underline{\left(\frac{L}{a}\right)^{d-1}} - \underline{C\cdot\left(\frac{L}{l}\right)^{d-1}}\right],$$

$$\text{where} \quad C = 2^{d-1}\pi^{d/2}\left(\Gamma\left(\frac{d+1}{2d}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2d}\right)\right)^d .$$

面積則による発散

この項は有限で、紫外カットオフに依らない

⇒ 場の理論側との比較が厳密に可能

(b) 球殻の場合

$$S_A = \frac{\pi^{d/2} R^d}{2G_N^{(d+2)}\Gamma(d/2)} \left[\underline{p_1\left(\frac{l}{a}\right)^{d-1}} + p_3\left(\frac{l}{a}\right)^{d-3} + \cdots \right.$$

面積則の紫外発散

$$\left. \cdots + \begin{cases} p_{d-1}\left(\dfrac{l}{a}\right) + \underline{p_d} & (\text{if } d = \text{even}) \\ p_{d-2}\left(\dfrac{l}{a}\right)^2 + \underline{q} \log\left(\dfrac{l}{a}\right) & (\text{if } d = \text{odd}) \end{cases} \right],$$

$$\text{where} \quad p_1 = (d-1)^{-1}, \; p_3 = -(d-2)/[2(d-3)], \ldots.$$

$$\ldots. \quad q = (-1)^{(d-1)/2}(d-2)!!/(d-1)!! \quad .$$

カットオフに依らない定数
$\Rightarrow$ 奇数次元の共形場理論の自由度？
RG flow で単調減少 [Myers – Sinha 10]
~ 奇数次元の`c - theorem'

カットオフに依らない係数
$\Rightarrow$ セントラルチャージに比例

具体的比較・検証

(i) AdS3/CFT2

この場合は、2次元共形場理論の結果が解析的に分かっているので、完全な比較が可能。両者の一致が厳密に証明できる。

(ii) AdS5/CFT4

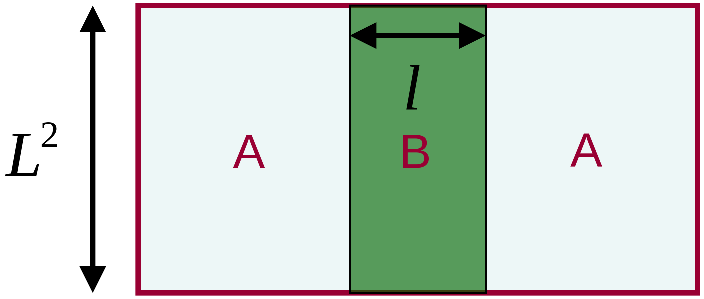
超重力理論に対応するのは、共形場理論が強結合な領域なので比較が困難。N=4超対称性ゲージ理論で、自由場の場合に比較すると50%程度係数がずれるが、関数形は一致する。
最近、「A=半径一定の球面内」の場合には一致の証明が、Myersらによって与えられた。[Casini-Huerta-Myers 11]

例：Free N=4 SU(N) super Yang-Mills v.s. AdS5×S5

$$S_A^{\text{free N=4}} = K \cdot \frac{N^2 L^2}{a^2} - \underline{0.078} \cdot \frac{N^2 L^2}{l^2}.$$

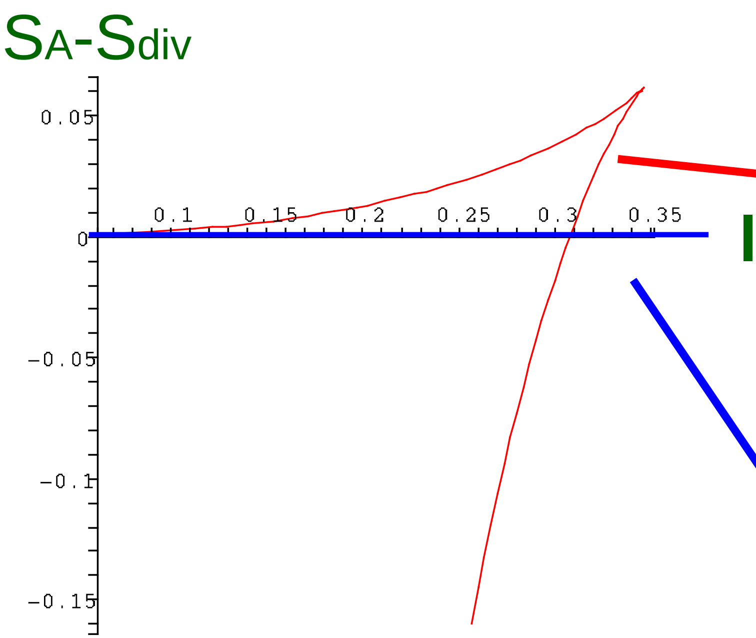
面積則の発散

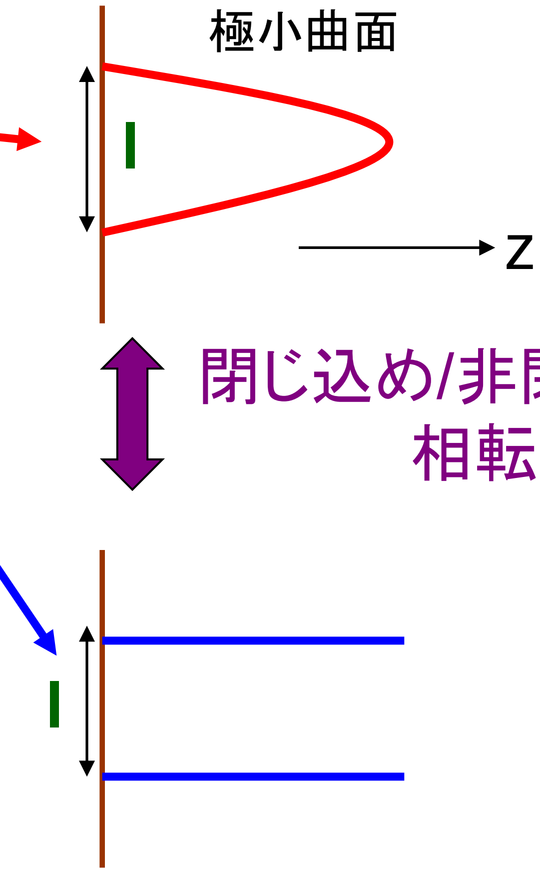
$$S_A^{AdS5} = K' \cdot \frac{N^2 L^2}{a^2} - \underline{0.051} \cdot \frac{N^2 L^2}{l^2}.$$



例：**閉じ込め相の場合**（D3-braneのSUSYを破るコンパクト化）
⇒ AdS Soliton 解

[Nishioka-TT 06, Klebanov-Kutasov-Murugan 07]





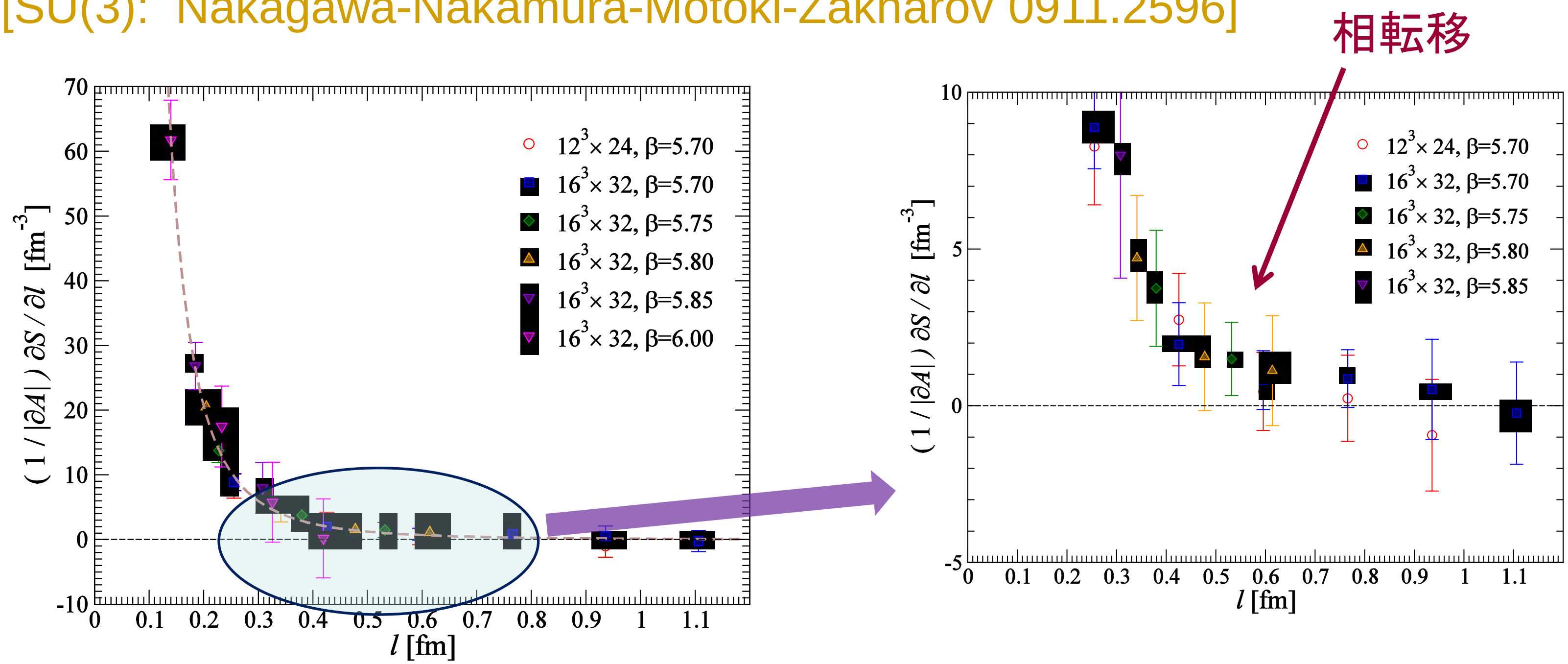
閉じ込め/非閉じ込め
相転移

閉じ込めの起きるゲージ理論では、
このような相転移が見られる。

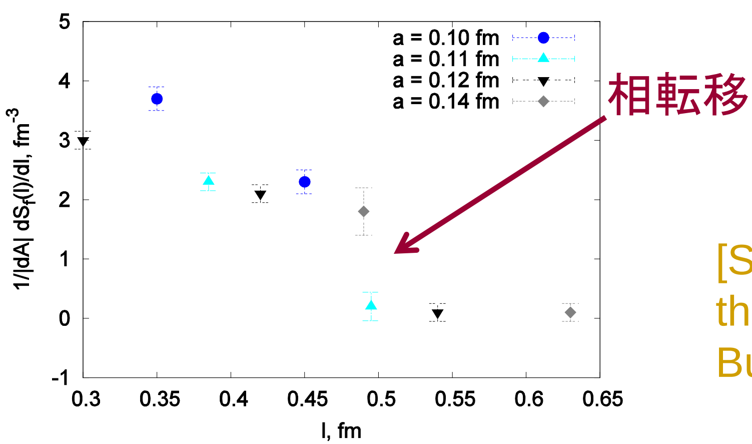
→ エンタングルメントエントロピー
は閉じ込めの秩序変数になる？

格子ゲージ理論の結果（4次元YM）

[SU(3): Nakagawa-Nakamura-Motoki-Zakharov 0911.2596]



[SU(2): Buividovich-Polikarpov 0802.4247]



[See for other calculations of EE in lattice gauge theory: Velytsky 0801.4111, 0809.4502; Buividovich-Polikarpov 0806.3376, 0811.3824]

④ AdS/CFTでランダウのフェルミ液体は実現可能か？

[Ogawa-Ugajin-TT 11]

面積則の破れ

d+1次元のフェルミオン系では、フェルミ面が存在すると、以下のようにlog的にEEの面積則が破れる。[Wolf 05, Gioev-Klich 05]

$$\boxed{S_A \sim L^{d-1}\log\, L, \qquad (\mathrm{L} = \mathrm{A}□\;□\;□□).}$$

[コメント]

(i)フェルミ面近傍の励起は、動径方向には`相対論的'になり、
　２次元CFTで近似できる。logの振る舞いはそれに起因する。

(ii) 最近の研究で、相互作用でこの振る舞いは変わらないことが
　分かってきている。[Swingle 09,10, Zhang-Grover-Vishwanath 11
Swingle-Senthil 11]

AdS/CFTに基づく重力双対の解析(特にAdS4/CFT3を考える)

仮定する計量の形(古典重力の極限で考える):

$$ds^2 = \frac{R_{AdS}^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + dx^2 + dy^2\right).$$

$$\text{Asymp. AdS} \Rightarrow f(0) = g(0) = 1.$$

前述の of EE のlog的振る舞いを実現するには、

$$g(z) \rightarrow \left(\frac{z}{z_F}\right)^2 \qquad (z \rightarrow \infty).$$

となることが必要。z_F^{-1} は、フェルミエネルギーと解釈できる。

ヌル・エネルギー条件

重力理論が物理的に矛盾がない（例えばゴーストが存在しないなど）ために、通常課す条件がヌル・エネルギー条件である:

$$T_{\mu\nu}N^{\mu}N^{\nu} \geq 0 \qquad \text{for any null vector } N^{\mu}.$$

これから、zが大きい赤外領域で、次の振る舞いが要求される:

$$g(z) \propto z^{2}, \qquad f(z) \propto z^{-2m} \quad \Rightarrow \quad m \geq 2.$$

2+1次元系の比熱の振る舞いは、

$$C \propto T^{\alpha} \quad \text{with} \quad \alpha \leq \frac{2}{3}.$$

このことから、ランダウのフェルミ液体（α=1)は、AdS/CFTの古典重力近似の範囲では実現できないことが分かった！

ランダウのフェルミ液体ができないのは、CFT側が強結合だからと推測される。このように比熱に異常が生じ、フェルミ面が存在する系は、**非フェルミ液体**と呼ばれている。

[cf. Faulkner-Liu-McGreevy-Vegh 09:古典重力の範囲ではない]

具体的には以下のような、Einstein-Maxwell-Scalar理論を考えるとそのような解が得られる:

$$S_{EMS}=\frac{1}{16G_N}\int dx^4\sqrt{-g}\left[R-2\Lambda-W(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)\right].$$

$$\left.\begin{aligned} V(\phi)+2\Lambda &\approx -\frac{(p^2+12p+32)}{4R_{AdS}^2}\cdot e^{-\sqrt{\frac{2}{p-2}}\phi}, \\ W(\phi) &\approx \frac{8A^2}{z_F^2\,p(8+p)R^2}e^{3\sqrt{\frac{2}{(p-2)}}\phi}, \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(z)\propto z^{-p},\ \ g(z)\propto z^2,\ \ (p>2).$$

[例えば、最近のHuijse-Sachdev-Swingle 11の論文で、Hidden Fermi Surfaceの例として活用されている。p=2の解は、Shaghoulian 11を参照。]

[より一般の場合]

$g(z) \propto z^{2n} \quad (z \to \infty)$ のように振る舞う場合に、

$$S_A \propto L^{\frac{2n}{n+1}}$$ が得られる。

ただし、$n \to 1$: $\quad S_A \propto L \log L \quad$ (Fermi surface)

疑問: 冪的に面積則を破る量子多体系は存在するか？
局所的な場の理論では存在しないのか？

例: 平坦な時空のホログラフィーはどんな感じか？ [Li-TT 10]

$$\Rightarrow \quad S_A \propto L^2 \quad \text{(Volume law)}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{dual} = \int dx^3 \phi(x) e^{\sqrt{-\partial^2}} \phi(x).$$

⑤ まとめと今後の展望

- 以上では、(共形)場の理論のエンタングルメント・エントロピー(EE)をAdS/CFT対応を用いて幾何学的に計算する方法について説明した。

  (1) EEのスケーリング
  (2) 閉じ込め相転移におけるEEの振る舞い
  (3) 量子情報理論の幾何学的解釈
  (4) AdS/CFTにおけるフェルミ面の性質

  などの理解に役立つことを見てきた。

- 最近の話題として他に、強結合系の熱化現象、MERAとの類似性、などがあり今後の発展が期待される。

最近の別の話題：強結合系の熱化現象への応用

量子多体系を励起した場合に起こる熱化現象は、相互作用が重要なので、直接的な解析は困難。しかしAdS/CFT対応を用いると、ブラックホールの生成過程として古典的に記述することができる。

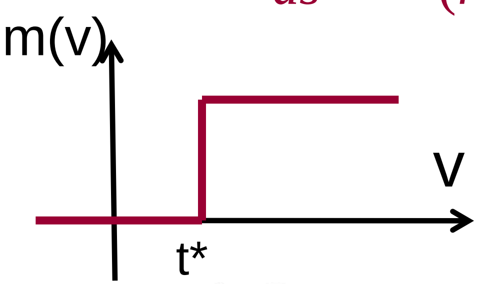
エンタングルメント・エントロピー　＝　粗視化したエントロピー

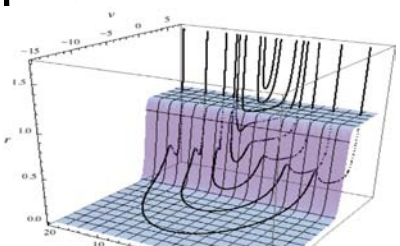
＝　生成されたブラックホールの大きさ

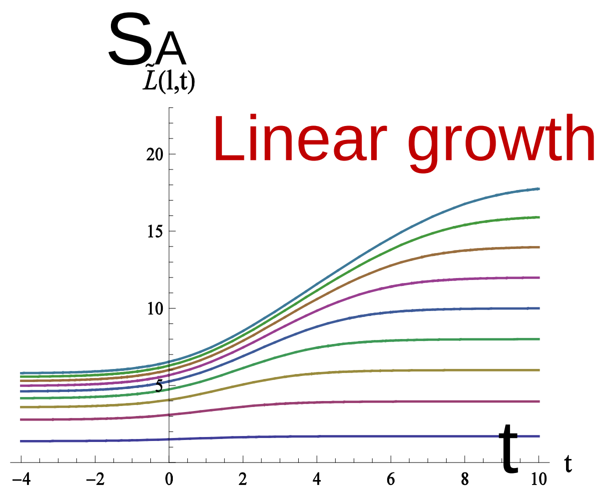
[宇賀神-高柳 10]

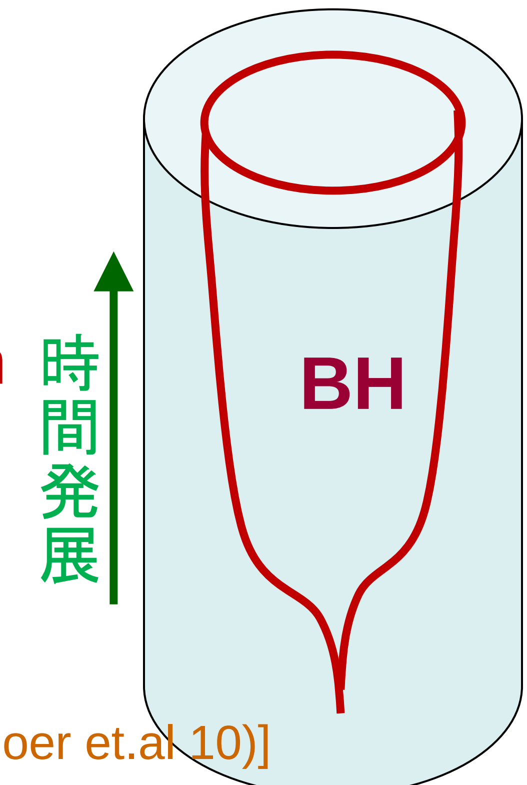
Vaidya時空を用いた解析

$$ds^2 = -(r^2 - m(v))dv^2 + 2drdv + r^2 dx^2$$









[Arrastia-Aparicio-Lopez 10 (also Albash-Johnson 10, de Boer et.al 10)]