Entanglement entropy of two spheres

大阪大学大学院　理学研究科
物理学専攻　素粒子論研究室
芝　暢郎

N.Shiba, Phys. Rev. D 83, 065002 (2011)
[arXiv:1011.3760v3 [hep-th]]
N.Shiba, [arXiv:1112.xxxx [hep-th]] 準備中

2011年　12月 「量子多体系のエンタングルメントとくりこみ群」 基礎物理学研究所

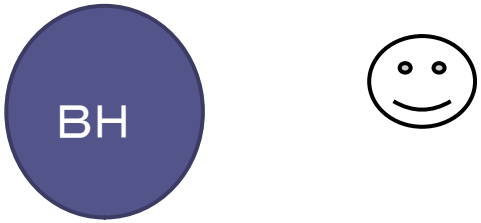
1.Introduction

・量子的な相関、entanglementを測る量として entanglement entropy (EE)がある。これは、複合系の一部を測定しないと仮定した場合の残りの系のエントロピーである。

・EEは black hole の外側の観測者が地平線の内部を観測できない状況で自然に現れる。

・場の理論のEEの研究はBHのエントロピーの研究からはじまった。

L.Bombelli,R.K.Koul,J.Lee,R.D.Sorkin **Phys.Rev.D34:373-383,1986**

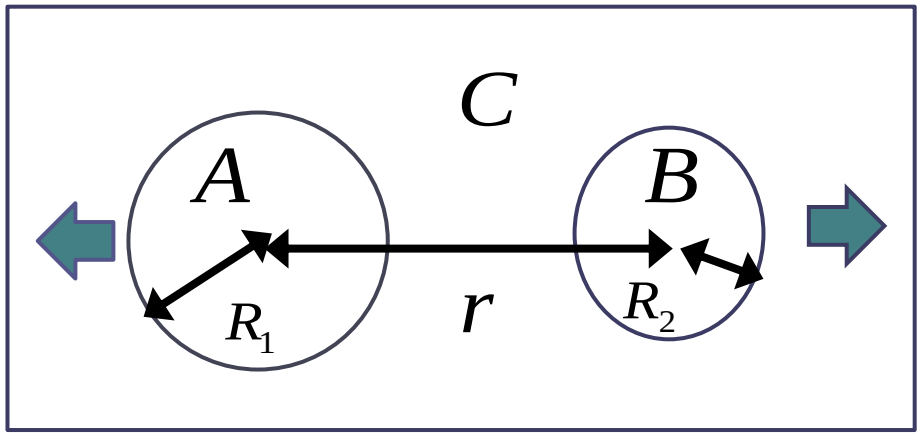


問題設定とMotivation

- 曲がった時空上の場の理論で解析する。（重力は古典的に扱う）
- Black holeが２つあるときの外側の場のEEを考える。
- このEEを熱力学的エントロピーとみなせるなら、EEが大きいほうが系は安定だと考えられる。

ＥＥのｒ依存性から
場がＢＨに及ぼすentropic force が分かる

Entropic force

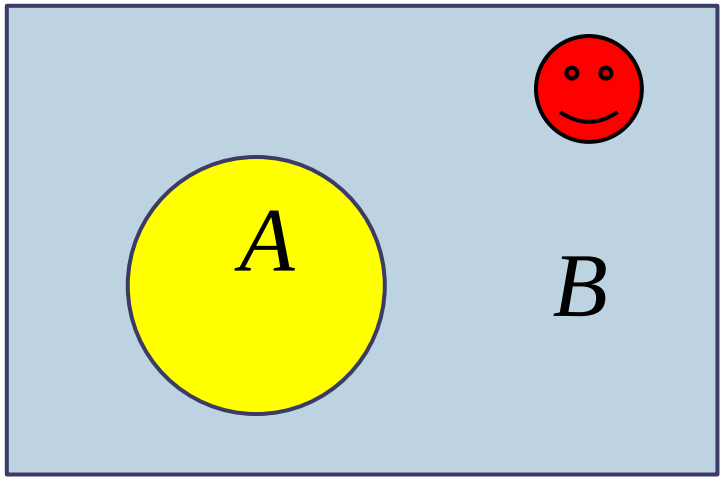


BHの外側の場のEEが熱力学的エントロピーとみなせるという仮定について

→ BHの外側の領域が独立な系かどうかがポイント

BHの外側の観測者にとっては、BHに落ち込む物体もBHに届くまで無限の時間がかかる。

→ BHの外側の観測者にとっては、 BHの外側の領域が独立な系である。



今回の研究内容

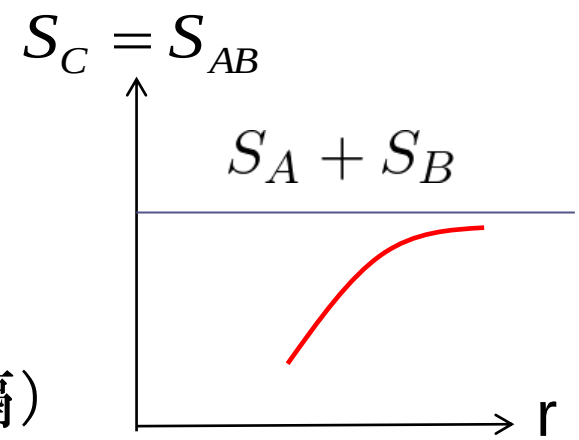
- (3+1)次元時空のmassless free scalar fieldのEE

- (3+1)次元Minkowski時空でのEEを数値計算した。

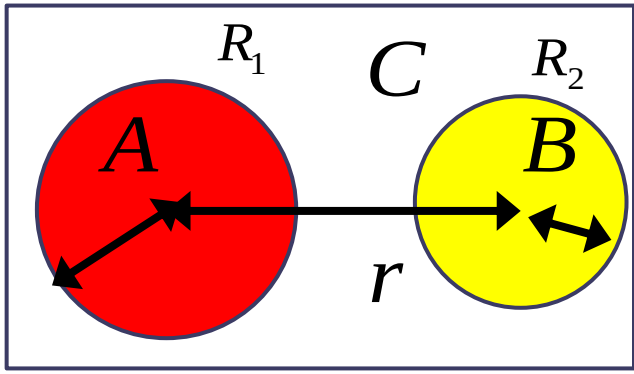
$$S_C - S_A - S_B = -0.26\frac{R_1^2 R_2^2}{r^4} \qquad r >> R_1, R_2$$

$$S_A = 0.37\frac{R_1^2}{a^2}$$

a：UVカットオフ長(格子間隔)



$S_C - S_A - S_B$ はカットオフに依存しない



- scalar field がBHに及ぼすentropic force の大きさを見積もる。

1.Introduction

2.Entanglement Entropy (EE) の定義と性質

3.自由スカラー場のEEの計算法(一般論)

4. (3+1)次元Minkowski時空での数値計算

5.Entropic force の大きさ

6.Conclusion

2.Entanglement entropyの定義と性質

定義 $S_A = -tr_A \rho_A \log \rho_A \quad \rho_A = tr_B \rho_{AB}$

一般的性質 複合系ABが純粋状態 → $S_{AB} = 0 \quad S_A = S_B$

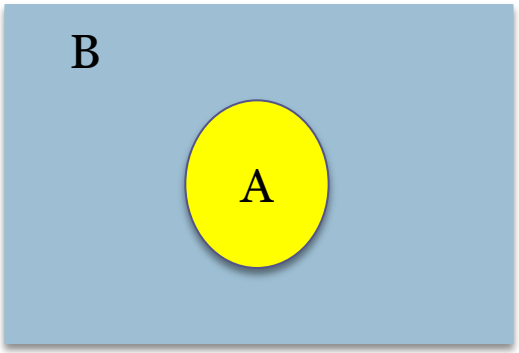
$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ → $S_{AB} = S_A + S_B$

場の理論のEE（geometric entropy）

部分系への分割は空間の分割として幾何学的に行う

全系：空間的多様体N上の場

部分系：Nの領域A上の場



場の理論のEEの面積則

(d+1)次元場の理論において全系が真空のとき

$$S_A = \gamma \cdot \frac{Area(\partial A)}{l^{d-1}} + subleading\ terms$$

← $S_A = S_B$ から予想される

多くの例で上の面積則が成り立つ。

M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. 71, 666 (1993)

γ ：無次元定数

l ：UVカットオフ長

3. 自由スカラー場のEEの計算法（一般論）

(d+1)次元時空 のスカラー場の真空状態のEE

・計算法

Scalar場を無限個の連結調和振動子として表し計算する ← 格子上の場の理論

L.Bombelli,R.K.Koul,J.Lee,R.D.Sorkin **Phys.Rev.D34:373-383,1986**

M. Srednicki **Phys.Rev.Lett.71:666-669,1993**.

$$L = \frac{1}{2} G_{MN} \dot{q}^M \dot{q}^N - \frac{1}{2} V_{MN} q^M q^N$$

← 曲がった時空でも使える

G_{MN}, V_{MN} :正定値行列

$$M \to x$$

$$q^M \to \phi(x)$$

$$\dot{q}^M \to \frac{d}{dt}\phi(x)$$

Minkowski時空の場合

$$L = \int d^d x \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2].$$

$$\frac{1}{2} V_{AB} q^A q^B \to \int d^d x \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^2].$$

$$V(x,y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}(k^2) e^{ik\cdot(x-y)}$$

空間内のある領域 Ω 内の場の自由度を部分トレースして

Ω^C のEEを求める。

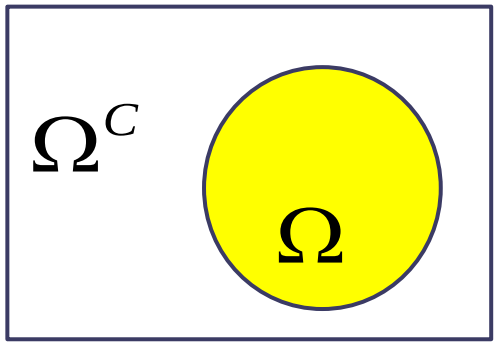
ρ から $\rho_{\Omega^C} = Tr_\Omega \rho$ を求める ← ガウス積分

↓

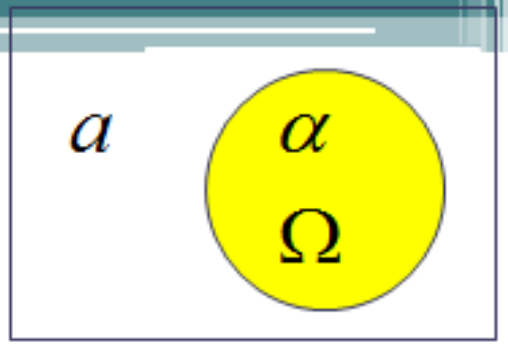
ρ_{Ω^C} はガウス型関数になる

↓

ρ_{Ω^C} から $S_{\Omega^C} = -Tr(\rho_{\Omega^C} \ln \rho_{\Omega^C})$ を求める



結果



$$W_{MA}G^{AB}W_{BN} = V_{MN} \quad G^{MP}G_{PN} = \delta^M_N \quad W^{MP}W_{PN} = \delta^M_N$$

Ω内の座標：α, β　　Ω^C 内の座標：a, b

$$A = (a, \alpha)$$

$$W_{AB} = \begin{pmatrix} W_{ab} & W_{a\beta} \\ W_{\alpha b} & W_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \qquad W^{AB} = \begin{pmatrix} W^{ab} & W^{a\beta} \\ W^{\alpha b} & W^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D & E \\ E^T & F \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_{\Omega^c} = \sum_n f(\lambda_n)} \qquad f(\lambda) \equiv \ln\left(\frac{1}{2}\lambda^{1/2}\right) + (1+\lambda)^{1/2}\ln[(1+\lambda^{-1})^{1/2} + \lambda^{-1/2}]$$

$$\boxed{\Lambda^a_b = -W^{a\beta}W_{\beta b} = -(EB^T)^a_b} \qquad \lambda_n \ : \ \Lambda \text{ の固有値}$$

固有値を求める問題に帰着する

4. (3+1)次元Minkowski時空での数値計算

・massless free scalar field の真空状態を考える。

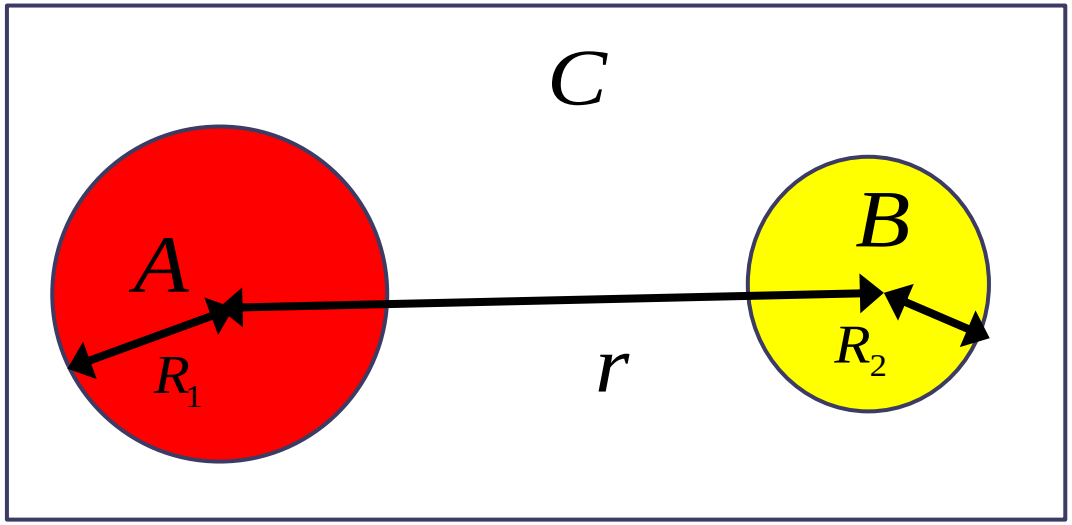
・BHの代わりに仮想的な球を考えその外部のEEを考える。

・全系が純粋状態なので $S_C = S_{AB}$ ⟹ S_{AB} を考える

計算法

L.Bombelli,R.K.Koul,J.Lee,R.D.Sorkin **Phys.Rev.D34:373-383,1986**

・正方格子上の場の理論で数値計算する。

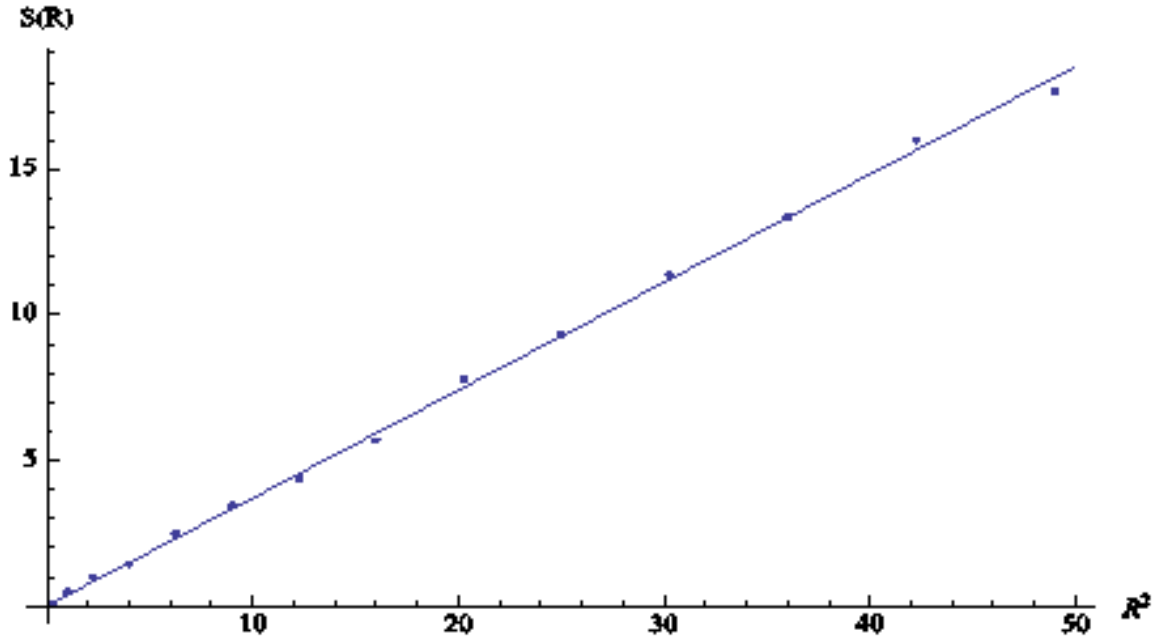


$$H = \frac{1}{2}\sum_{n}\left[\pi_n^2 + \sum_{\mu=1}^{d}(\phi_{n_\nu+\delta_{\mu\nu}} - \phi_{n_\nu})^2 + a^2 m^2 \phi_n^2\right]$$

$$N \to \infty \qquad am \to 0 \qquad V = W^2$$

$$W_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{iq(m-n)} [2\sum_{\mu=1}^{d}(1-\cos q_\mu)]^{1/2}$$

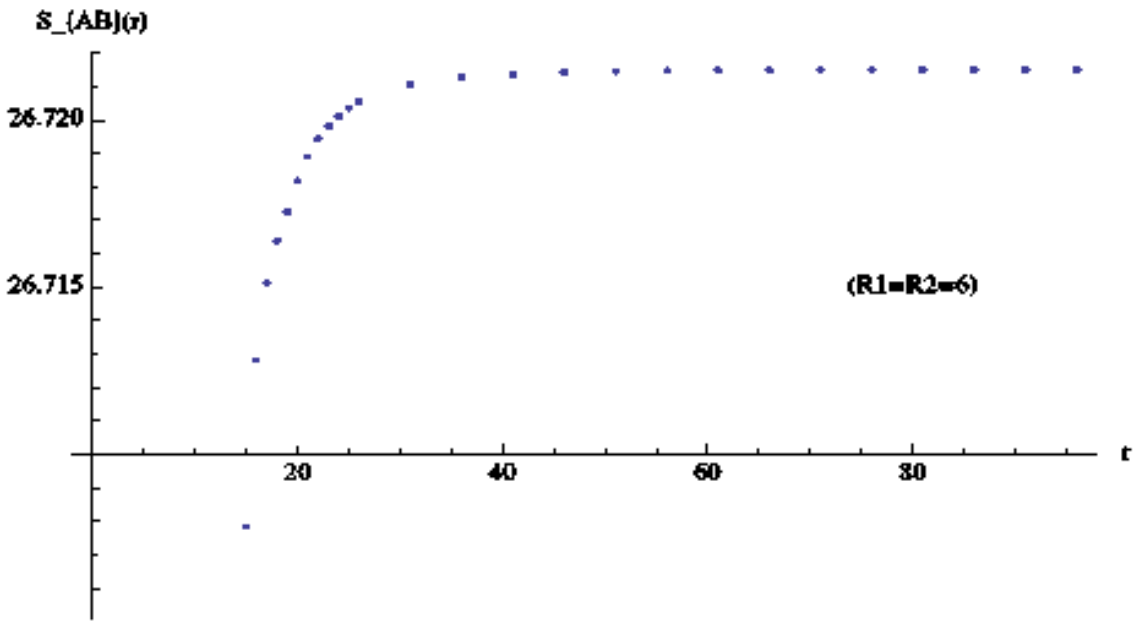
$$W_{mn}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{iq(m-n)} [2\sum_{\mu=1}^{d}(1-\cos q_\mu)]^{-1/2}$$



単独の球のEE

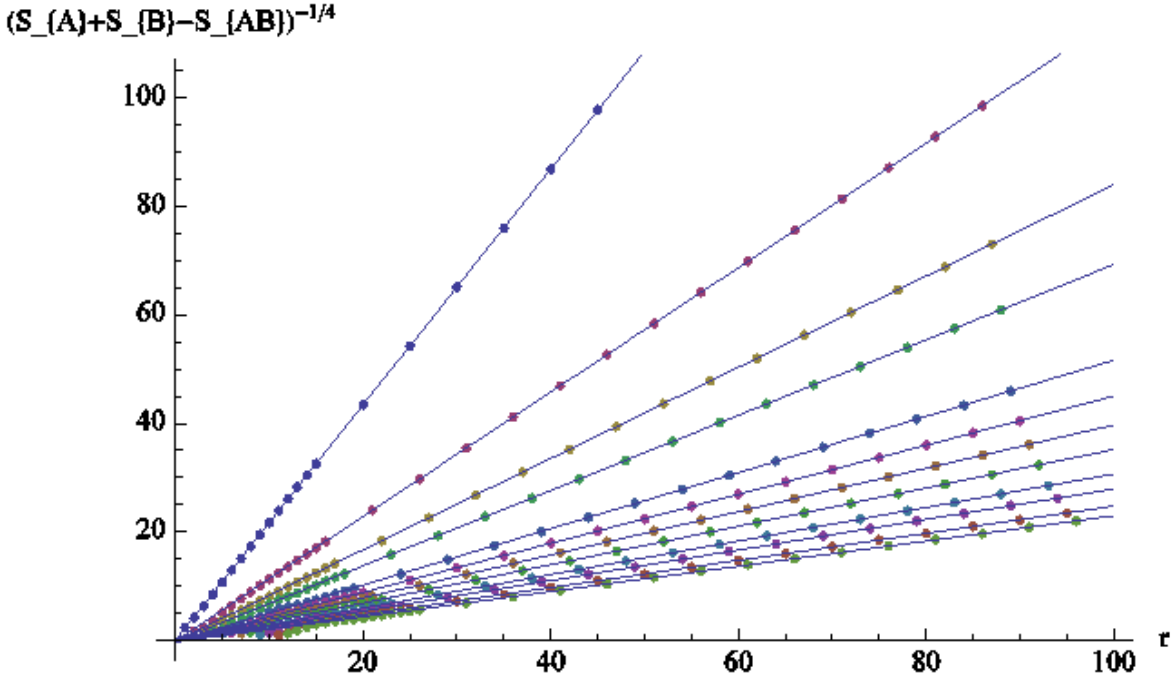
$$S_A = 0.37\frac{R_1^2}{a^2}$$

a: 格子間隔



$$S_{AB}(r)$$

$$R_1 = R_2 = 6$$



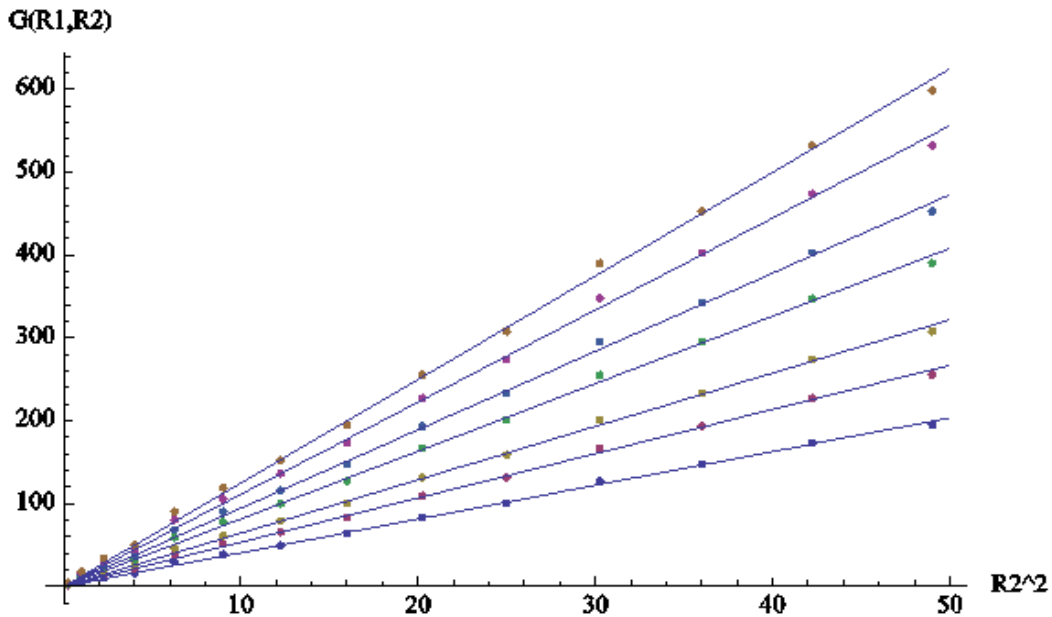
$$(S_A + S_B - S_{AB})^{-1/4}(r)$$

下から

$$R_1 = R_2 = 0.5, 1, \ldots, 6$$

$r >> R_1, R_2$ のとき

$$S_{AB} - S_A - S_B = -\frac{G(R_1, R_2)}{r^4}$$



下から $R_1 = 4, 4.5, \ldots, 7$

結果

$$S_{AB} - S_A - S_B = -0.26\frac{R_1^2 R_2^2}{r^4}$$

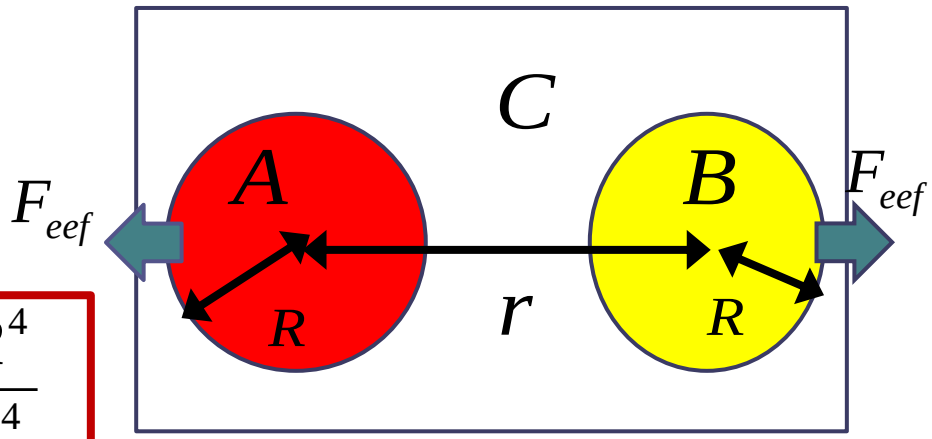
5.Entropic force の大きさの見積もり

$R_1 = R_2 \equiv R$ とする。

$$F_{eef} = -T\frac{\partial S_C}{\partial r}$$

T をホーキング温度、 $S_C = S_{AB}$ をMinkowski時空のものとする。

$$T = T_H = \frac{1}{8\pi GM} \qquad R = 2GM$$



◎ $r >> R$ のとき

$$S_C = S_{AB} = S_A(R) + S_B(R) - 0.26\frac{R^4}{r^4}$$

$$F_{eef} = \frac{\hbar}{c^5}\frac{8}{\pi}\frac{G^3M^3}{r^5} = \hbar c\frac{1}{\pi}\frac{R^5}{r^5}$$

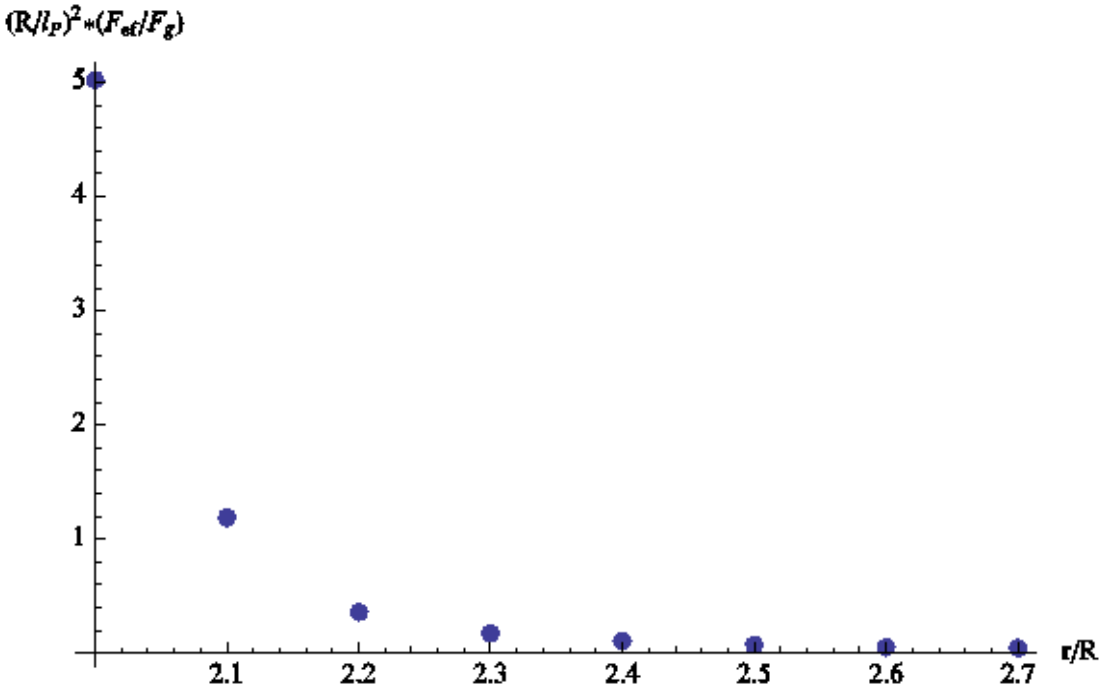
$$F_g = -\frac{G\ M^2}{r^2} = -c^4\frac{R^2}{4Gr^2}$$

$$\frac{|F_{eef}|}{|F_g|} = \frac{\hbar}{c^5}\frac{8}{\pi}\frac{G^2M}{r^3} = \frac{\hbar}{c^3}\frac{4}{\pi}\frac{GR}{r^3} = \frac{4}{\pi}\frac{l_P^2R}{r^3}$$

例えば $r = 4R$ のときは

$$\frac{|F_{eef}|}{|F_g|} = 0.02\frac{l_P^2}{R^2}$$

◎ $r \approx R$ のとき



縦軸 $(R/l_P)^2(F_{eef}/F_g)$

横軸 r/R

$r \approx R$ で $(R/l_P)^2(F_{eef}/F_g) \approx 1$ となる。

$R \approx l_P$ のとき $r \approx R$ で

entropic force が重力と同じぐらいの大きさになる。

6.Conclusion

(1) (3+1)次元Minkowski時空で $S_C = S_{AB}$ を格子上の場の理論で数値計算した。

$$S_{AB} - S_A - S_B = -0.26\frac{R_1^2 R_2^2}{r^4} \qquad r >> R_1, R_2$$

$r < R_1, R_2$ ではより急激に変化する。

$$S_A = 0.37\frac{R_1^2}{a^2}$$

a：UVカットオフ長(格子間隔)

$S_{AB} - S_A - S_B$ はカットオフに依存しない

(2) 2つのBH間に働くentropic force の大きさを見積もった。

$$F_{eef} = -T\frac{\partial S_C}{\partial r} = -T\frac{\partial S_{AB}}{\partial r}$$

はBH間に斥力として働く。

$R_1 = R_2 \equiv R \approx l_P$ のとき $r \approx R$ で

entropic force が重力と同じぐらいの大きさになる。

6.Conclusion

(3) 予想

AとBの相互情報量 $S_A + S_B - S_{AB}$ はUVカットオフに依存しない

(d+1)次元Minkowski時空 $(d \geq 2)$

解析的に $S_A + S_B - S_{AB} = \dfrac{G_d(R_1, R_2, a)}{r^{2d-2}}$ $r >> R_1, R_2$

N.Shiba, Phys. Rev. D 83, 065002 (2011)

が求まっている。よって次の形が予想される。

$$S_A + S_B - S_{AB} = g_d \frac{R_1^{d-1} R_2^{d-1}}{r^{2d-2}} \qquad r >> R_1, R_2$$

d=2 でも確認済み。