Wilsonの数値くりこみ群とホログラフィックRG

と似ているかも？

奥西巧一（新潟大理学部）

近藤効果

金属中の磁性不純物の問題

低温での電気抵抗の異常

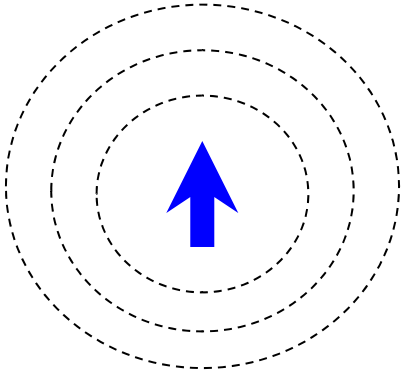
自由電子 ＋ 局在スピン

フェルミ面 ⇒ もっとも簡単な本質的な多体問題

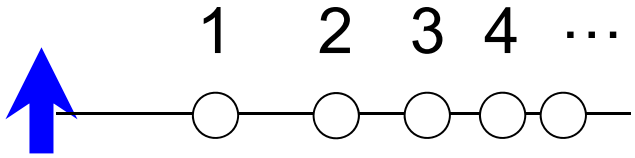
- 1964 近藤淳 2次摂動により電気抵抗のLog発散
- 1967 Mahan X線の吸収端異常の理論
- 1970 Anderson,Yuval, Hamann スケーリング
- 1975 Wilson 数値くり込み群
  山田-芳田 局所フェルミ流体
- 1980 Wiegman, Andrei, ベーテ仮設厳密解
- 1989 Affleck, Ludwig Boundary CFT

Wilson's Numerical Renormalization Group(NRG)

Kondo impurity problem



1D quantum system
with the boundary



$$H_{\Lambda}^{N} = \Lambda^{N}[\sum_{n=1\sigma}^{N} \Lambda^{-n}(c_{n\sigma}^{+} c_{n+1\sigma} + c_{n+1\sigma}^{+} c_{n\sigma}) + \sigma_1 \cdot S_{imp}]$$

Add free electrons and project out the higher energy states

$$H_{\Lambda}^{N+1} = \Lambda H_{\Lambda}^{N} + \sum_{\sigma} t(c_{N\sigma}^{+} c_{N+1\sigma} + c_{N+1\sigma}^{+} c_{N\sigma})$$

$\Lambda(>1)$ is a cut off parameter, which controls the energy scale of the system.

Λ itself comes from log-discretization of Fermi sea

Wilson's NRG

Kondo model

linear dispersion

continuous model

s-wave+impurity

$$H = -i\sum \frac{\partial}{\partial x_i} + JS\cdot\sigma_i\delta(x_i)$$

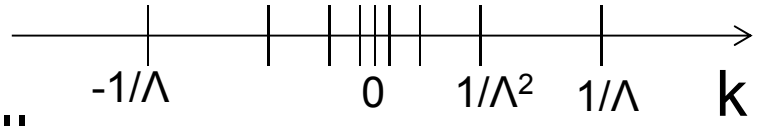
1

$$\int_{-1}^{1} k c_{k\sigma}^{+} c_{k\sigma} dk - J\int \vec{S} \cdot (c_{k\alpha}^{+}\vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{k\beta}) dk$$

2

log-discritization

discritize wave space into shell

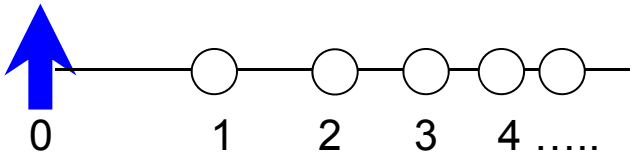


$$H_{\Lambda}^{N+1} = \Lambda H_{\Lambda}^{N} + t(c_{N\sigma}^{+} c_{N+1\sigma} + c_{N+1\sigma}^{+} c_{N\sigma})$$

cutoff Λdue to discritization

3

Numerical RG： add electrons on a 1D lattice step by step



Omit higher energy states and reduce the dimension of Hamiltonian matrix。

RG iteration

add an electron → diagonalize Hamiltonian → keep lower energy states → add an electron

Real Space RG for 1D Quantum systems

1975: Wilson NRG for Kondo impurity problem

金属中の1不純物問題、 **臨界系のみ**

ブロックスピン変換　　1次元系量子系では破綻

ブロック化により、エンタングルメントが切断！

1992: 密度行列くりこみ群（DMRG）

ギャップフル1次元系の基底状態探索に絶大な威力

ただし、 ⇒ DMRGを単純にくりこみ群と解釈するのは問題！

2005: エンタングルメントくり込み（MERA)

Disentanglerでエンタングルメントの面積則を克服
＋計算可能なアルゴリズム

Wilson NRG成功の背景は？ 普遍的な応用性はあるのか？

- エネルギースケールの選択性はどう理解できるのか

  高エネルギー状態の切断と離散化λの関係

- Gapful の系ではなにをやっているのか良く分からない。

  Λとギャップのエネルギースケールの競合

カットオフとエネルギースケールの選択性の理解を深めたい

log離散化のΛ 役割

- そもそも臨界系である（不純物以外は自由電子）。

⇒ **赤外発散**

- マップされた1次元格子模型は、単に結合定数が Λ^n の非一様なタイトバインディング模型

$$H_\Lambda^N = \Lambda^N [\sum_{n=1\sigma}^{N} \Lambda^{-n} (c_{n\sigma}^+ c_{n+1\sigma} + c_{n+1\sigma}^+ c_{n\sigma}) + \sigma_1 \cdot S_{imp}]$$

⇒ $t_n \approx e^{-n \log \Lambda}$

遠くを落としてしまう。

実効システムサイズ $L \approx \dfrac{1}{\log \Lambda}$ の有限系

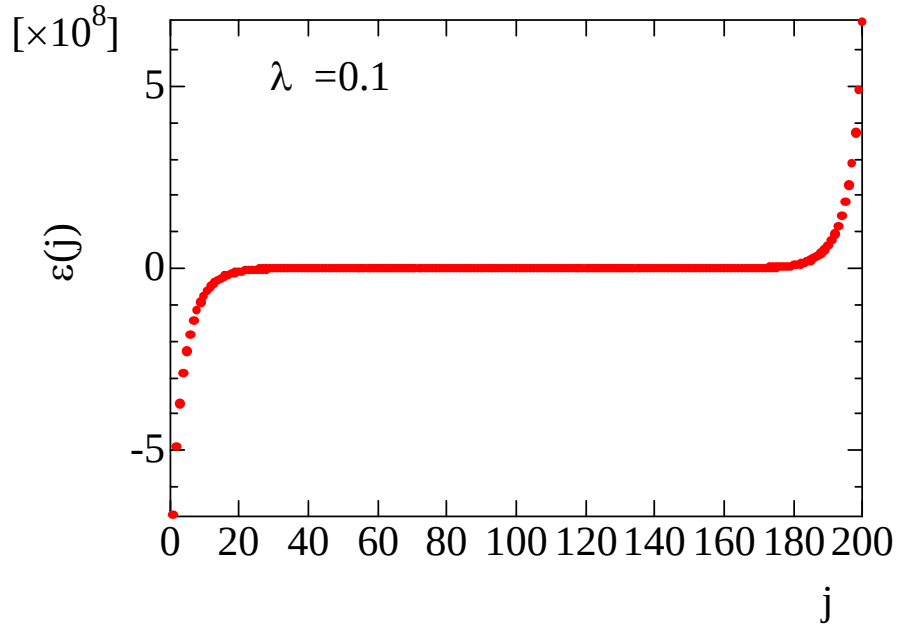
free fermion problem

essence of Wilson NRG => bulk fermion part

Free fermion with exponentially deformed interaction

$$H_{\Lambda}^{N} = \sum_{n=1}^{N} e^{\lambda n}(c_n^{+}c_{n+1} + c_{n+1}^{+}c_n)$$

$$\Lambda = e^{\lambda}$$



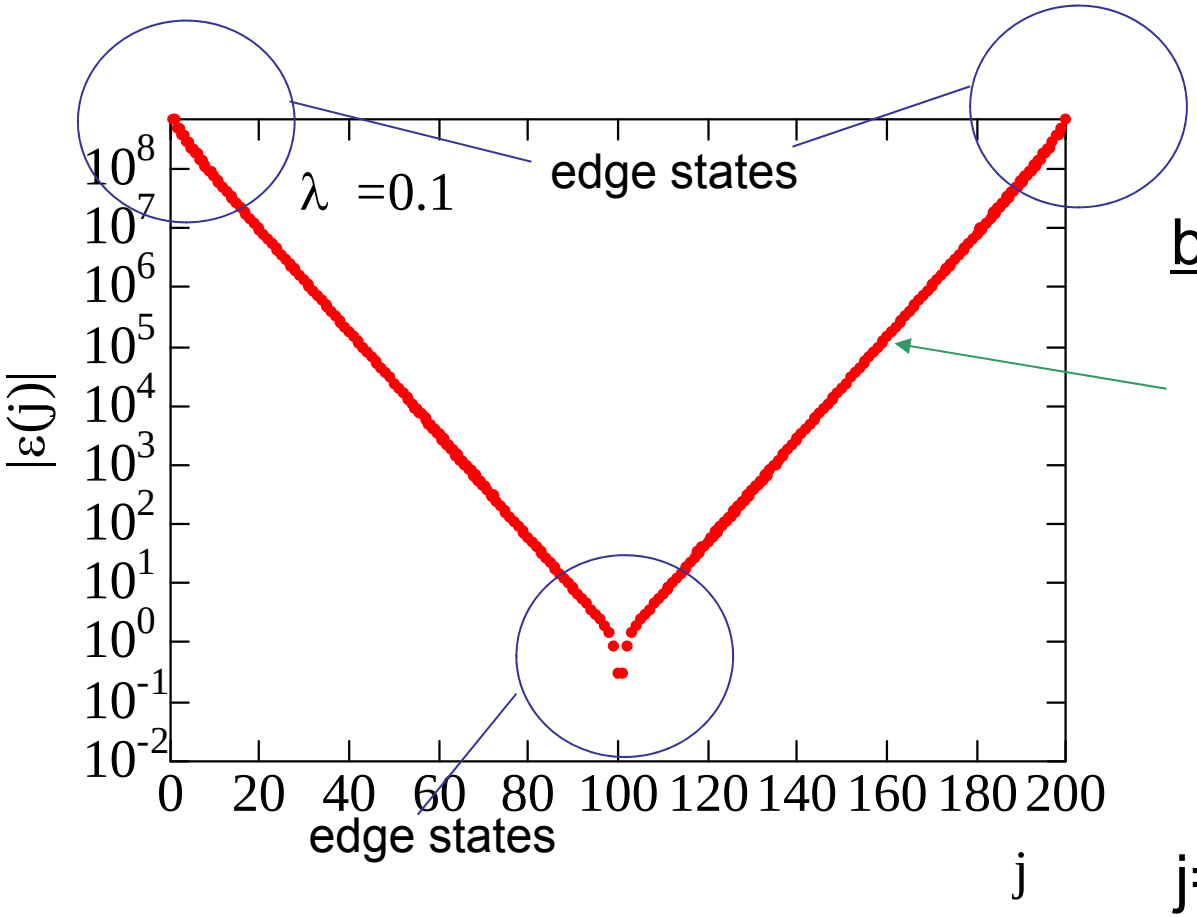
1-body eigenvalue problem

λ=0.1, N=200

cf. if λ=0, then $\varepsilon(j) = 2\cos(\frac{\pi j}{N+1})$

1-particle eigenvalue spectrum

log-scale plot



<u>bulk part</u>

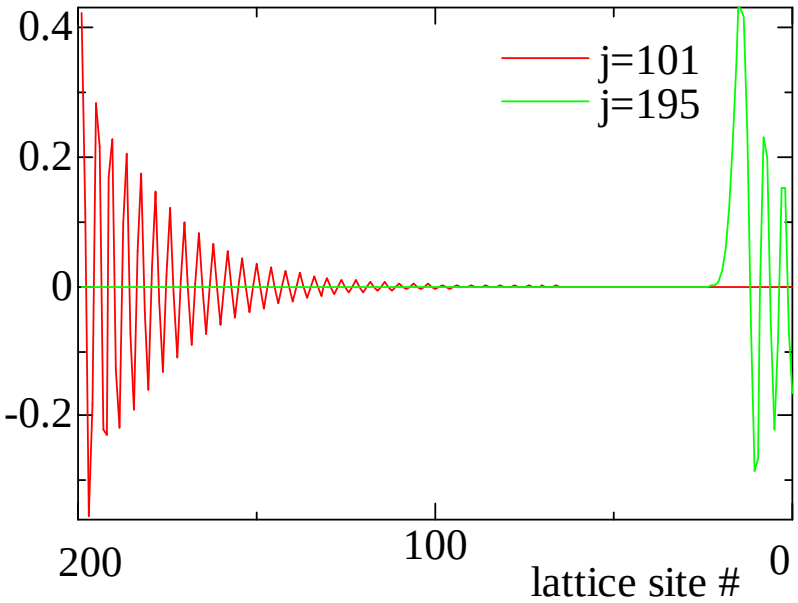
exponential dependence

j=100がhalf-filling

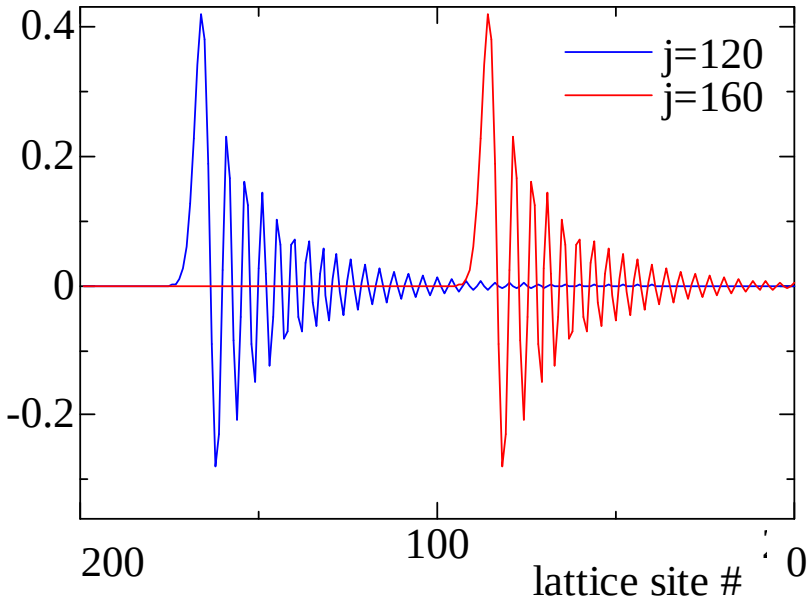
wavefunction

plane waves(uniform)

wave packets(exponential)



edge states



bulk states

translation = energy level shift

Lattice translation

T is the lattice translation(n->n+1) operator

for fermion operators

$$THT^{-1} = \sum_n e^{n\lambda} T(c_n^+ c_{n+1} + c_{n+1}^+ c_n)T^{-1} = e^{-\lambda} H$$

[# infinite sum of "n" is assumed]

if $|\psi\rangle$ is an eigenstate of H $\quad H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$TH|\psi\rangle = ET|\psi\rangle \Leftrightarrow THT^{-1}T|\psi\rangle = ET|\psi\rangle$$

$$\Leftrightarrow H(T|\psi\rangle) = e^{\lambda} E(T|\psi\rangle)$$

$\Rightarrow$ $\quad E' = e^{-\lambda} E \quad$ is also an eigenvalue

Energy-scale-free nature can be also seen.

wavefunction: “continuous” limit(λ→0)

$x = n\lambda$: $$\phi(x-\lambda)+\phi(x+\lambda)=e^{-x}\phi(x)$$

omit $O(\lambda^2)$: $$\lambda^2\phi''(x)+(2-e^{-x})\phi(x)=0$$

$y=\exp(-x/2)$: $$\phi''(y)+\frac{1}{y}\phi''(y)+\frac{4}{\lambda^2}(\frac{2}{y^2}-1)\phi(x)=0$$

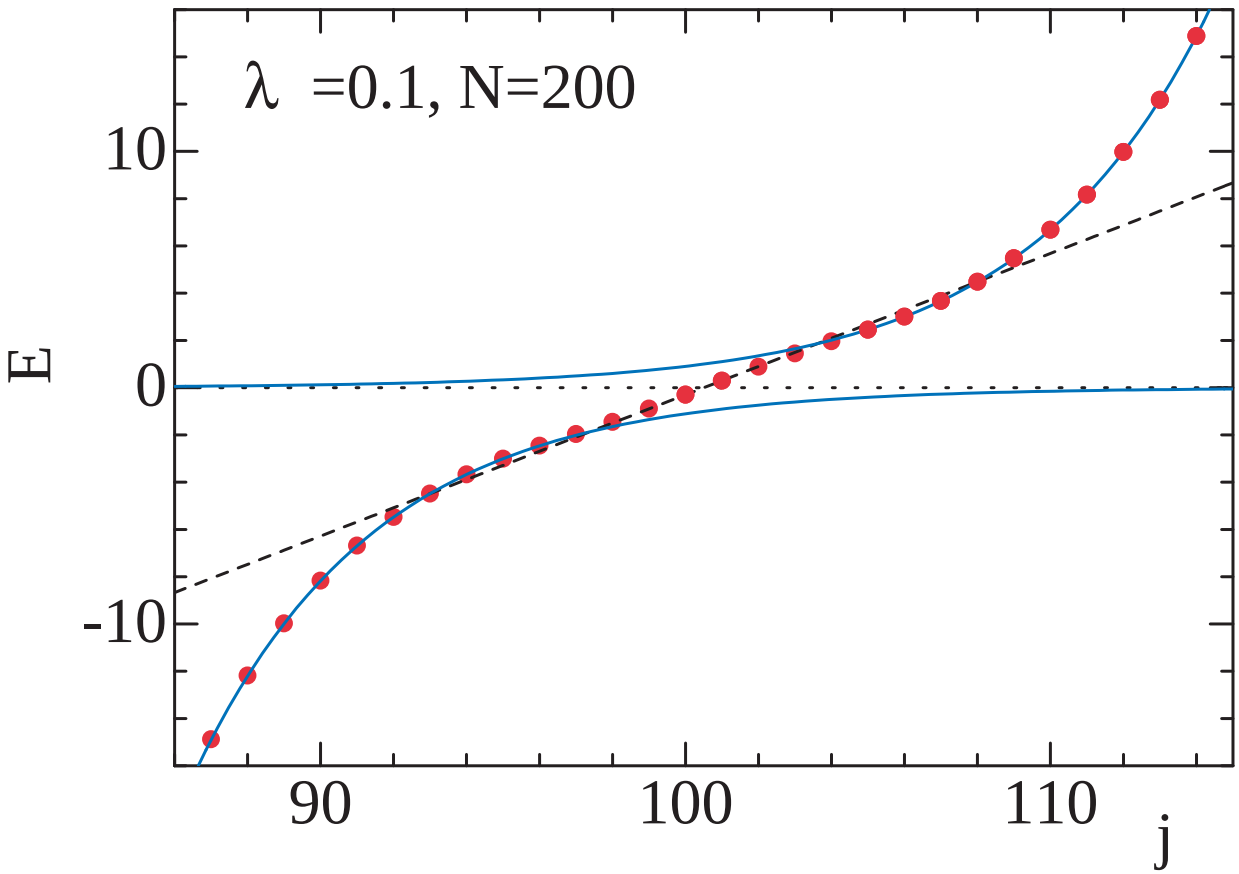
modified Bessel function with imaginary order

$$\phi(x)\sim K_{2ic}(ce^{-x/2}) \qquad c=2\sqrt{2}/\lambda$$

x>>1 $\phi(x)\sim\exp(-icx)$ x<<-1 $\phi(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2ce^{-x/2}}}\exp(-ce^{-x/2})$

consistent with the numerical result

edge state



E shows linear dependence with respect to j near the Fermi surcace.（E~2）

edge state

$$\phi(n) = e^{\pm in\pi/2}\eta(n) \qquad \pm i[\eta(n-1) - \eta(n+1)] = e^{-\lambda n}\overline{E}\,\eta(n)$$

omit $O(\lambda^2)$: $\quad i2\lambda\eta'(x) \mp Ee^{-x}\eta(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad \eta(x) \sim \exp(\pm i\frac{E}{2\lambda}e^{-x})$$

This wavefunction is not permitted as a bulk wavefunction

$\Rightarrow$ edge state of the lowest energy scale

$E = \pi\gamma e^{-\lambda/2}q$ with the boundary condition

$q = \pm 1/2,\ \pm 3/2, \cdots \qquad \psi(0) = 0, \psi(N+1) = 0$

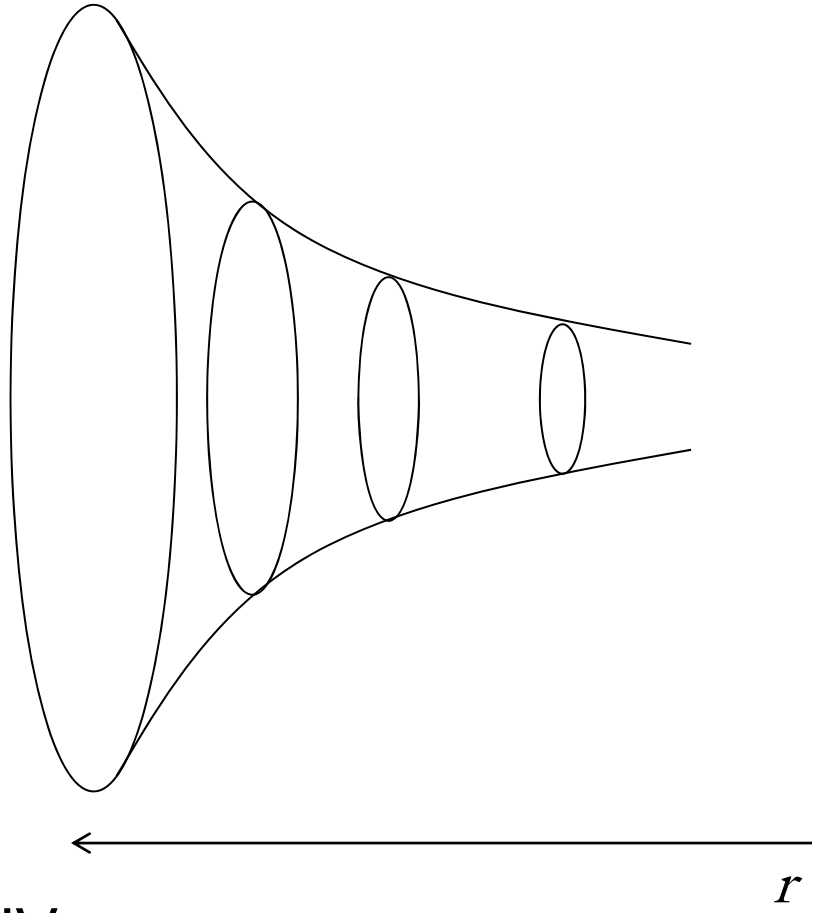
This edge state is eventually invisible for a practical Λ~2

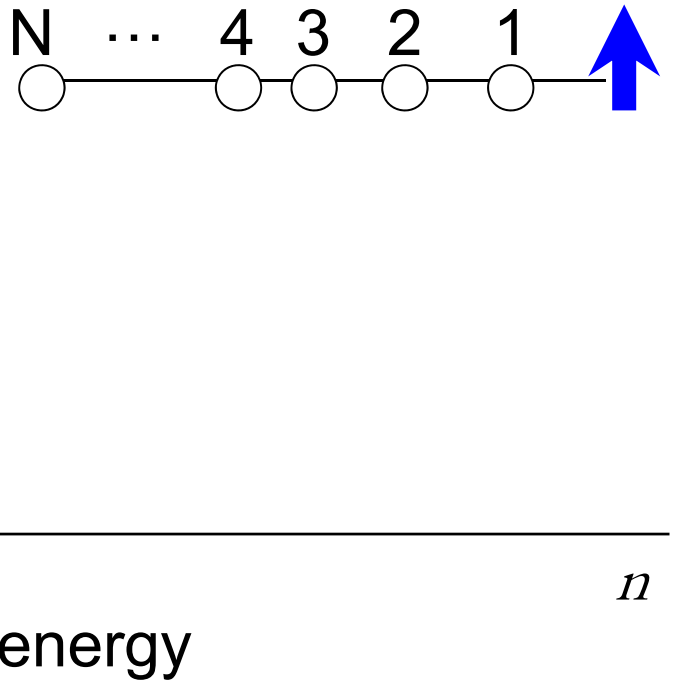
$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2 + dx^2 - dt^2)$$

$$\cong R^2(e^{2r}(dx^2 - dt^2) + dr^2)$$

$$H_\Lambda^N \approx$$

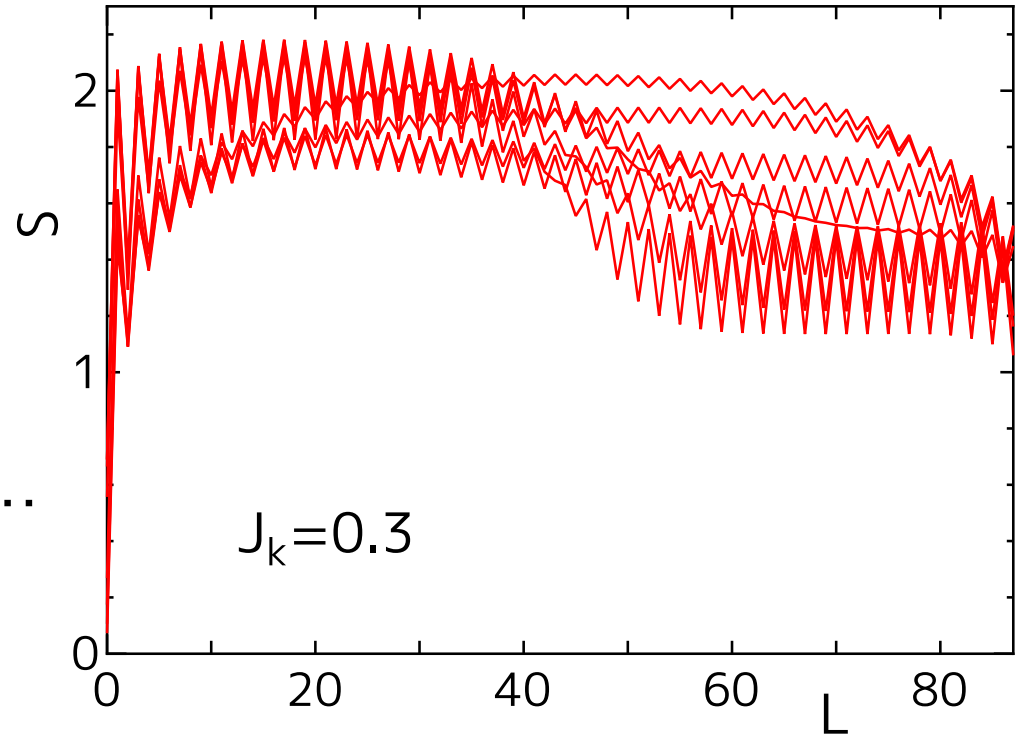
$$e^{\lambda N}[\sum_{n=1\sigma}^{N} e^{-\lambda n}(c_{n\sigma}^{+} c_{n+1\sigma} + c_{n+1\sigma}^{+} c_{n\sigma}) + \sigma_1 \cdot S_{imp}]$$





Entanglement entropy

ln2
=0.693…

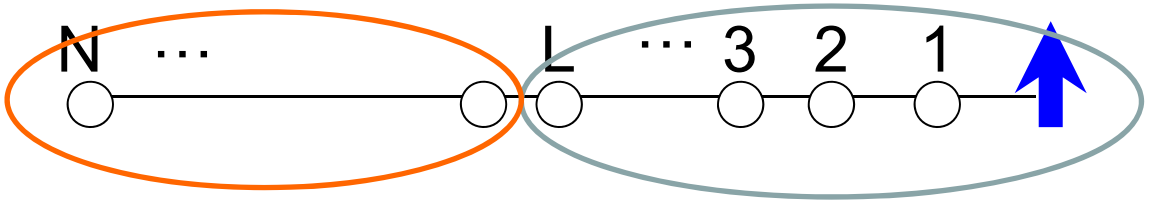


damping factor

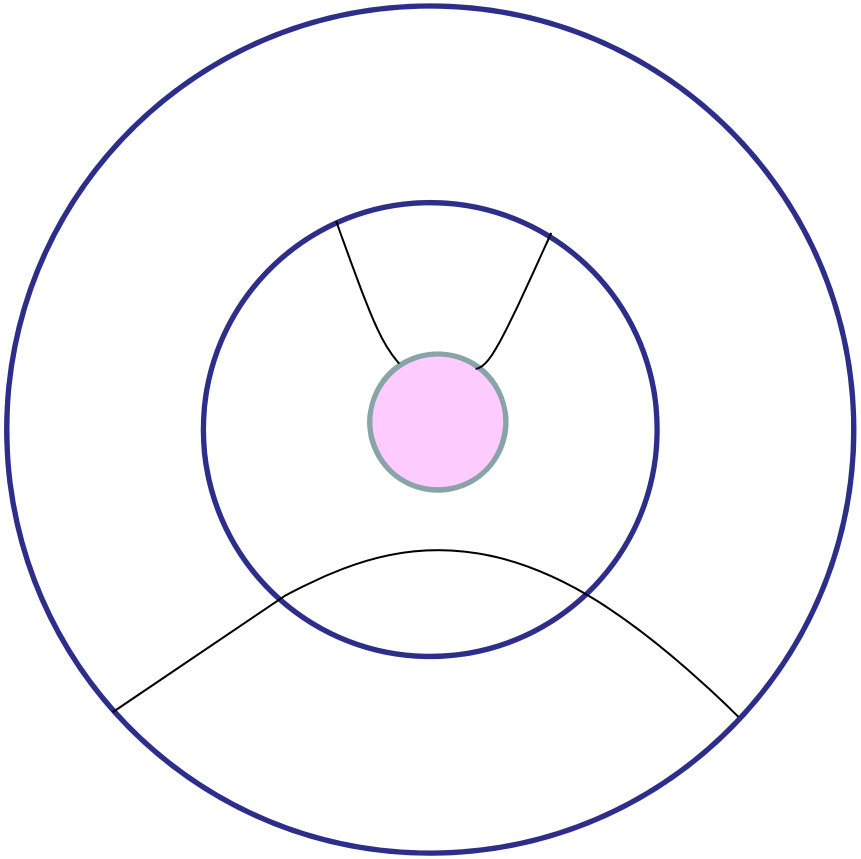
$e^{-\lambda n}$

λ=0.0
0.05
0.1
….
0.35

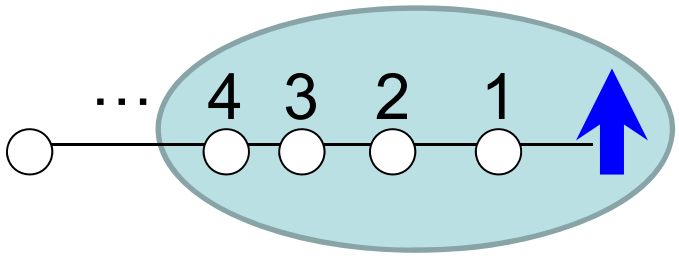
Bath



System



Black hole is screened
in Lower energy scale



Spin Singlet

Impurity spin is screened
by the free electrons.

entanglement entropy => Area law

まとめと展望

Wilson　NRG

指数関数的に変形された自由フェルミオンが
スケールフリーな理論
格子の並進がエネルギースケールの選択に対応

エンタングルメントエントロピーとエネルギースケール

Horographic RGとの類似性

今後の展望

Wilsonの理論の場の理論化
$AdS_?$時空の離散化？　動径方向の理論？